ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΑΙ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Βοήθημα διδάσκοντα

Νίκος Μυλωνάς
Βασίλης Παπαδόπουλος

Εκδόσεις Τζιόλα

.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

Άσκηση 1.3 α) Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν

$$(1-2i)(z+\overline{z})-(3-i)(z-\overline{z})=4-Im(z).$$

β) Να βρεθούν οι τιμές των $x, y \in R$ αν

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1+i-\frac{1}{x+yi}.$$

Λύση

α) Έστω $z = x + yi$ και λόγω των (2.11) και (2.12) η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}(1-2i)2x-(3-i)2yi &= 4-y \Leftrightarrow\\ 2x-4xi-6yi-2y &= 4-y \Leftrightarrow\\ (2x-y-4)-(4x+6y)i &= 0\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}2x-y-4 &= 0\\ 4x+6y &= 0\end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς y και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει

$$4x+6(2x-4)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

οπότε

$$y=-1$$

Άρα ο μιγαδικός z είναι

$$z=\frac{3}{2}-i.$$

β) Επειδή

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{1^2+1^2}=\frac{1^2-1^2+2i}{2}=i,$$

η σχέση αυτή γίνεται

$$i^2+\frac{1}{x+yi}=1+i$$

ή

$$-1+\frac{1}{x+yi}=1+i$$

ή

$$\frac{1}{x+yi}=2+i$$

ή
$$x + yi = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i,$$
οπότε
$$x = \frac{2}{5} \text{ και } y = -\frac{1}{5}.$$

Άσκηση 1.4 Αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών
$$z_1 = \frac{-2-3i}{3+2i}, \quad z_2 = \frac{3-4i}{1-i},$$
να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου OAB, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Λύση

Υπολογίζουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου OAB με την βοήθεια μιγαδικών.

$$(OA) = |z_1| = \left|\frac{-2-3i}{3+2i}\right| = \frac{|-2-3i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = 1$$
$$(OB) = |z_1| = \left|\frac{3-4i}{1-i}\right| = \frac{|3-4i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
(AB) = |z_1 - z_2| &= \left|\frac{-2-3i}{3+2i} - \frac{3-4i}{1-i}\right| \\
&= \left|\frac{(-2-3i)(1-i)-(3+2i)(3-4i)}{(3+2i)(1-i)}\right| \\
&= \left|\frac{-22+5i}{(3+2i)(1-i)}\right| \\
&= \frac{|-22+5i|}{|3+2i||1-i)|} \\
&= \frac{\sqrt{(-22)^2+5^2}}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{1^2+(-)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{509}{26}}
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.10 α) Αν $z \neq 0$, να δειχθεί ότι:
$$\text{ο } \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \text{ είναι πραγματικός} \quad \text{και ο } \frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z} \text{ φανταστικός}.$$
β) Να δειχθεί ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2
$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 \text{ είναι πραγματικός και ο } z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 \text{ φανταστικός.}$$

Λύση

α) Βρίσκουμε τον συζυγή του $w = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$ εφαρμόζοντας ιδιότητες συζυγών.

$$\begin{aligned}
\overline{w} &= \overline{\left(\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)} + \overline{\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{(\overline{z})}} + \frac{\overline{(\overline{z})}}{\overline{z}} \\
&= \frac{\overline{z}}{z} + \frac{z}{\overline{z}} \qquad , \\
&= w
\end{aligned}$$

οπότε ο w είναι πραγματικός.

α) όμοια

$$
\begin{aligned}
\overline{k} &= \overline{\left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)} - \overline{\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)} \\
&= \left(\frac{\overline{z}}{z}\right) - \left(\frac{z}{\overline{z}}\right) \\
&= -\left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right) = -k
\end{aligned}
$$

οποτε ο k είναι φανταστικός.
β) Υπολογίζουμε τους $\overline{m}$ και $\overline{n}$

$$\overline{m} = \overline{z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2} = \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2 = m$$

οπότε ο m είναι πραγματικός,

$$
\begin{aligned}
\overline{n} &= \overline{z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2} \\
&= \overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2 \\
&= -(z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2) = -n
\end{aligned}
$$

οπότε ο n είναι φανταστικός.

Ἀσκηση 1.13 Να περιγραφεί και να σχεδιασθεί ο γεωμετρικός τόπος του z αν (z_0, z_1, z_2 δοσμένοι μιγαδικοί και $k > 0$ πραγματική σταθερά):

1) $\lvert z\rvert = k$	2) $\lvert z - z_0\rvert < k$	3) $\lvert z\rvert \le k$	4) $\lvert z - z_0\rvert > k$
5) $\lvert z - z_0\rvert \ge k$	6) $\lvert z - z_1\rvert > \lvert z - z_2\rvert$	7) $\lvert z - z_1\rvert \le \lvert z - z_2\rvert$	8) $k_1 < \lvert z - z_0\rvert \le k_2$

Λύση

Από την παρατ. 1.9 προκύπτει ότι οι ζητούμενοι γεωμετρικοί τόποι είναι:
1) Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα k.
2) Το εσωτερικό κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνα k.
3) Το εσωτερικό και η περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα k.
4) Το εξωτερικό κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνα k.
5) Το εξωτερικό και η περιφέρεια κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνα k.
6) Το ημιεπίπεδο που ορίζει η μεσοκάθετος του ΑΒ, όπου Α και Β οι εικόνες των z_1 και z_2, και περιέχει το Β.
7) Το ημιεπίπεδο που ορίζει η μεσοκάθετος του ΑΒ, όπου Α και Β οι εικόνες των z_1 και z_2, και περιέχει το Α και η μεσοκάθετος.
8) Δακτύλιος με με κέντρο την εικόνα του z_0, εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας k_1 και k_2 και η περιφέρεια του εξωτερικού κύκλου (ακτίνας k_2).

Ἀσκηση 1.26 α) Να δειχθεί ότι $\lvert z\rvert = k$ $(k \in R^+)$ αν και μόνον αν $\overline{z} = \dfrac{k^2}{z}$.

β) Να δειχθεί ότι για οποιουσδήποτε μη μηδενικούς μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 με

$$\lvert z_1\rvert = \lvert z_2\rvert = \lvert z_3\rvert = \sqrt{2} \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

ισχύει

$$\left\lvert \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right\rvert = 1.$$

Λύση

α)
$$\begin{aligned} |z| = k &\Leftrightarrow |z|^2 = k^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} = k^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = \frac{k^2}{z} \end{aligned}.$$

β) Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$,

$$\overline{z}_1 = \frac{(\sqrt{2})^2}{z_1} = \frac{2}{z_1}, \quad \overline{z}_2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{z_2} = \frac{2}{z_2}, \quad \overline{z}_3 = \frac{(\sqrt{2})^2}{z_3} = \frac{2}{z_3}$$

ή
$$\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z}_1}{2}, \ \frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z}_2}{2}, \ \frac{1}{z_3} = \frac{\overline{z}_3}{2}.$$

Έτσι
$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| &= \left|\frac{\overline{z}_1}{2} + \frac{\overline{z}_2}{2} + \frac{\overline{z}_3}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3| \\ &= \frac{1}{2}|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| \\ &= \frac{1}{2}|z_1 + z_2 + z_3| \\ &= \frac{1}{2}\left|1 - \sqrt{3}i\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 1.27 α) Να δειχθεί ότι αν $z \neq -i$, τότε
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow Im(z) > 0.$$
β) Να δειχθεί ότι αν $z \neq -1$, τότε
$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \Leftrightarrow Re(z) > 0.$$

Λύση

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 &\Leftrightarrow |z-i| < |z+i| \\ &\Leftrightarrow |z-i|^2 < |z+i|^2 \\ &\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z-i}) < (z+i)(\overline{z+i}) \\ &\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z}+i) < (z+i)(\overline{z}-i) \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 < z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2i(z-\overline{z}) < 0 \\ &\Leftrightarrow 2i2iIm(z) < 0 \\ &\Leftrightarrow -4Im(z) < 0 \\ &\Leftrightarrow Im(z) > 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 1.29 Να λυθεί η εξίσωση

$$z^3 + 1 = 0$$

και να δειχθεί ότι οι ρίζες είναι διαδοχικοί οροι γεωμετρικής προόδου.

Λύση
Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$z^3 = 1e^{i\pi},$$

οπότε από τον τύπο του De Moivre προκύπτει ότι

$$z = \sqrt[3]{1}e^{i\left(\pi + \frac{k2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\pi} = -1, \\
z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_3 &= e^{i\frac{7\pi}{3}} = \left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right) = \left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Επειδή

$$z_2 z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{12\pi}{3}} = e^{i4\pi} = 1 = (-1)^2 = z_1^2,$$

οπότε οι z_2, z_1, z_3 είναι διαδοχικοί οροι γεωμετρικής προόδου.

Άσκηση 1.31 α) Να υπολογιστεί ο

$$z = (1 + i\sqrt{3})^6.$$

β) Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του $1 + i\sqrt{3}$.

Λύση
α) Το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού $1 + i\sqrt{3}$ είναι

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{και} \quad arg(1 + i\sqrt{3}) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

οπότε η πολική μορφή του είναι

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Επομένως

$$z = (1 + i\sqrt{3})^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 e^{i6\frac{\pi}{3}} = 64e^{i2\pi} = 64.$$

β) Από τον τύπο του De Moivre και το (α) προκύπτει ότι οι κυβικές ρίζες του $1 + i\sqrt{3}$ είναι

$$z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{k2\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{2}e^{i0} = \sqrt[3]{2},\\
z_2 &= \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2},\\
z_3 &= \sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= \sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\sqrt[3]{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.49 α) Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $z_0 = 1 + \sqrt{2}i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(z) = 3z^3 - 4z^2 + 5z + 6.$$

β) Να παραγοντοποιηθεί το $P(z)$.

Λύση

α)

$$(1 + \sqrt{2}i)^2 = 1^2 - (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}i = -1 + 2\sqrt{2}i,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
P(1 + \sqrt{2}i) &= 3(1 + \sqrt{2}i)^3 + 4(1 + \sqrt{2}i)^2 + 5(1 + \sqrt{2}i) + 6\\
&= 3(1 + \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i)^2 - 4(-1 + 2\sqrt{2}i) + 5(1 + \sqrt{2}i) + 6\\
&= 3(1 + \sqrt{2}i)(-1 + 2\sqrt{2}i) + 4(-1 + 2\sqrt{2}i) + 6 = 0.
\end{aligned}$$

β) Επειδή το $P(z)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, σύμφωνα με το θεώρ. 1.3, και ο συζυγής $\overline{z}_0 = 1 - \sqrt{2}i$ του z_0 είναι ρίζα, οπότε, σύμφωνα με το παράδ. 1.6,

$$P(z) = (z^2 - 2\cdot 1z + 1^2 + (\sqrt{2})^2)Q(z) = (z^2 - 2z + 3)Q(z),$$

όπου το πολυώνυμο $Q(z)$ προκύπτει από την διαίρεση πολυωνύμων $P(z)$ δια $z^2 - 2z + 3$. Έτσι

$$P(z) = (z^2 - 2z + 3)(3z + 2).$$

Άσκηση 1.51 α) Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = -27$ και να παρασταθούν οι λύσεις στο επίπεδο.
β) Αν ο $3 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$z^3 + kz^2 + 40z + m = 0, \quad k, m \in R:$$

$i)$ Να βρεθούν οι τιμές των k, m.
$ii)$ Να βρεθούν οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

Λύση

α) Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$z^3 = 27e^{i\pi},$$

οπότε από τον τύπο του De Moivre προκύπτει ότι

$$z = \sqrt[3]{27}e^{i\left(\frac{\pi + k2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 3e^{i\pi} = -3,\\
z_2 &= 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\\
&= 3\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= 3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2},\\
z_3 &= 3e^{i\frac{7\pi}{3}}\\
&= 3\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right)\\
&= 3\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

β) i) Επειδή ο $3+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής

$$
\begin{aligned}
(3+i)^3 + k(3+i)^2 + 40(3+i) + m = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 138 + 8k + m + i(66 + 6k) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 138 + 8k + m = 0 \quad \text{και} \quad 66 + 6k = 0.
\end{aligned}
$$

Από την λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$k = -11 \quad \text{και} \quad m = -50.$$

ii) Επειδή οι συντελεστές της εξίσωσης αυτής είναι πραγματικοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3, και ο $\overline{3+i} = 3 - i$.
Σύμφωνα με το παράδ. 1.6,

$$z^3 - 11z^2 + 40z - 50 = (z^2 - 2\cdot 3z + 3^2 + 1^2)Q(z) = 0,$$

όπου το $Q(z)$ προκύπτει από την διαίρεση του $z^3 - 11z^2 + 40z - 50$ δια $z^2 - 6z + 10$ ως $Q(z) = z - 5$, οπότε η άλλη ρίζα είναι $z = 5$.

Άσκηση 1.57 Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες z_1^n και z_2^n, όπου z_1 και z_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0.$$

Λύση
Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι

$$\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 = -4(1 - \cos^2\theta) = -4\sin^2\theta \leq 0$$

έχει ρίζες

$$z_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm i2\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$z^2 - Sz + P = 0 \tag{i}$$

όπου

$$\begin{aligned}
S &= z_1^n + z_2^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n \\
&= \left(e^{i\theta}\right)^n + \left(e^{i(-\theta)}\right)^n = e^{in\theta} + e^{-in\theta} \\
&= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) \\
&= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) \\
&= 2\cos(n\theta) \\
P &= z_1 z_2^n = (z_1^n z_2)^n = \left(e^{in\theta}e^{-in\theta}\right)^n = 1^n = 1,
\end{aligned}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$z^2 - 2\cos(n\theta)z + 1 = 0.$$

Άσκηση 1.65 Να δειχθεί ότι η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών z_1, z_2 είναι ίση με

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1\overline{z}_1 + \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_2\overline{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2 + |z_2|^2 \\
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) \\
&= z_1\overline{z}_1 - \overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 \\
&= |z_1|^2 - \overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2 + |z_2|^2
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

οπότε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2}.$$

Άσκηση 1.70 Να δειχθεί ότι για οποιασδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 και κάθε $\theta \in R$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει:

$$\frac{|z_1|^2}{\sin^2\theta} + \frac{|z_2|^2}{\cos^2\theta} \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(\overline{z}_1 z_2). \tag{1}$$

Λύση

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(\overline{z}_1 z_2) &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_1\overline{z_2} \\ &= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_1\overline{z}_2 \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\ &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= |z_1 + z_2|^2 \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

ή

$$(|z_1| + |z_2|)^2 \geq |z_1 + z_2|^2,$$

οπότε, για να δείξουμε την (1) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{|z_1|^2}{\sin^2\theta} + \frac{|z_2|^2}{\cos^2\theta} \geq (|z_1| + |z_2|)^2. \tag{2}$$

Επειδή

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

θέτουμε $k = \sin^2\theta$, οπότε $\cos^2\theta = 1 - k$. Έτσι η (2) γράφεται

$$\frac{|z_1|^2}{k} + \frac{|z_2|^2}{1-k} \geq (|z_1| + |z_2|)^2. \tag{2}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές και γράφουμε την (2) ως β΄βάθμια ανίσωση ως προς k.

$$(1-k)|z_1|^2 + k|z_2|^2 \geq k(1-k)\left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

ή (γράφοντας, μετά από λίγες πράξεις, την σχέση αυτή ως τριώνυμο ως προς k)

$$(|z_1| + |z_2|)^2 k^2 - 2|z_1|(|z_1| + |z_2|)k + |z_1|^2 \geq 0$$

Η διακρίνουσα της ανίσωσης αυτής είναι

$$\Delta = (-2|z_1|(|z_1| + |z_2|))^2 - 4(|z_1| + |z_2|)^2|z_1|^2 = 0,$$

οπότε η ανίσωση αυτή, άρα και η (2) (που είναι ισοδύναμη με αυτή), αληθεύει για κάθε $k \in (0, 1)$.

Άσκηση 1.80 α) Να βρεθεί η συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς $\widetilde{G}(\omega)$ του κυκλώματος του σχ. 1.23, που περιέχει πυκνωτή χωρητικότητας C, αντιστάτη αντίστασης R και πηνίο αυτεπαγωγής L.
β) Να δειχθεί ότι το μέτρο της $\widetilde{G}(\omega)$ τείνει στο μηδέν για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές της συχνότητας ω, οπότε έχει σημαντικές τιμές για ενδιάμεσες τιμές, οπότε το κύκλωμα αυτό λέγεται **ζωνοπερατό φίλτρο συχνοτήτων**.
γ) Να βρεθεί η διαφορά φάσης εισόδου-εξόδου ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω.
Δίνεται ότι από την ανάλυση του κυκλώματος προκύπτει ότι

$$\widetilde{v}_0 = \frac{\dfrac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L}}{\dfrac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} + Z_R}\widetilde{v}_i, \tag{i}$$

όπου

$$Z_R = R, \quad Z_L = iL\omega \quad \text{και} \quad Z_C = \frac{1}{iC\omega} \tag{ii}$$

οι σύνθετες μιγαδικές αντιστάσεις του αντιστάτη και του πυκνωτή.

Λύση

α) Από την (i) προκύπτει (διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή δια $\dfrac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L}$)

$$\widetilde{v}_0 = \frac{1}{1 + Z_R \dfrac{Z_C + Z_L}{Z_C Z_L}} \widetilde{v}_i = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_R}{Z_C} + \dfrac{Z_R}{Z_L}} \widetilde{v}_i,$$

οπότε, λόγω της (ii),

$$\widetilde{v}_0 = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\dfrac{1}{iC\omega}} + \dfrac{R}{iL\omega}} \widetilde{v}_i = \frac{1}{1 + iRC\omega - i\dfrac{R}{L\omega}} \widetilde{v}_i = \frac{1}{1 + iR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)} \widetilde{v}_i.$$

Έτσι από την (1.32) προκύπτει ότι

$$\widetilde{G}(\omega) = \frac{\widetilde{v}_0}{\widetilde{v}_i} = \frac{1}{1 + iR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}. \qquad (iii)$$

β) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.13, η απολαβή τάσης, δηλαδή ο λόγος του πλάτους V_0 της τάσης εξόδου $v_0 = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ προς το πλάτος V_i της τάσης εισόδου $v_i = V_i \cos \omega t$ είναι ίσο με το μετρο της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς

$$\frac{V_0}{V_i} = |\widetilde{G}(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + iR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)} \right| = \frac{1}{\left|1 + iR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}. \qquad (iv)$$

Από την (iv) και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0} \frac{V_0}{V_i} &= \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}} = 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \frac{V_0}{V_i} &= \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}} = 0, \end{aligned}$$

οπότε για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες συχνότητες οι τιμές της απολαβής τάσης είναι πολύ μικρες, δηλαδή πρακτικά μηδέν.

γ) Σύμφωνα με την παρατ. 1.13, η διαφορά φάσης εισόδου-εξόδου είναι ίση με το όρισμα της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς (iii), οπότε, λόγω και της (1.24) και της παρατ. 1.7,

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= arg(\widetilde{G}(\omega)) = arg\left(\frac{1}{1 + iR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\right) \\ &= arg(1) - arg\left(1 + iR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right) \\ &= -\tan^{-1} R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right). \end{aligned}$$

Άσκηση 1.81 Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της απόστασης από την αρχή των αξόνων των εικόνων του μιγαδικού z για το οποίο ισχύει

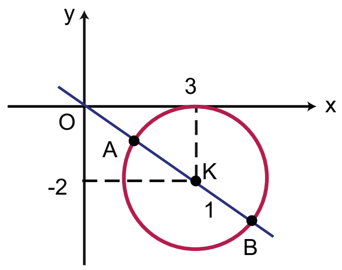
$$|z - 3 + 2i| = 1$$

Λύση

$$|z - 3 + 2i| = 1 \;\Leftrightarrow\; |z - (3 - 2i)| = 1,$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.9, οι εικόνες του μιγαδικού z βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3, -2)$ και ακτίνα 1 (βλ. Σχήμα 1.19).

Επομένως, η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της απόστασης από την αρχή των αξόνων των



Σχήμα 1.19 *Ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z.*

εικόνων του z αντιστοιχούν στους μιγαδικούς που έχουν εικόνες τα σημεία A και B του Σχήματος 1.19 τα οποία απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, οπότε η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του $|z|$ είναι

$$\begin{aligned} |w|_{min} &= OA = OK - KA = \sqrt{3^2 + (-2)^2} - \rho = \sqrt{13} - 1 \\ |w|_{max} &= OB = OK + KB = \sqrt{13} + 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 1.82 Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του μέτρου του μιγαδικού

$$w = z - 2 + 2i$$

αν για τον μιγαδικό z ισχύει

$$|z + 1 - i| \leq 2.$$

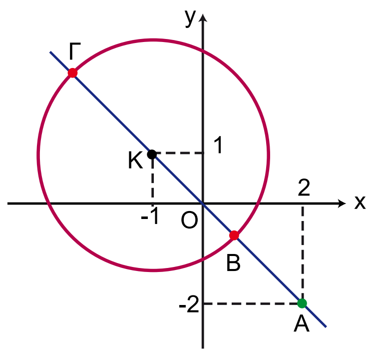
Λύση

$$|z + 1 - i| \leq 2 \iff |z - (-1 + i)| \leq 2,$$

οπότε οι εικόνες του μιγαδικού z βρίσκονται στο εσωτερικό και την περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο $K(-1, 1)$ και ακτίνα 2 (βλ. Σχήμα 1.20).

$$|w| = |z - 2 + 2i| = |z - (2 - 2i)| = (MA),$$

όπου M, A οι εικόνες του z και του $z_1 = 2 - 2i$.



Σχήμα 1.20 *Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z και η εικόνα A του μιγαδικού $z_1 = 2 - 2i$.*

Επομένως, η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του $|w|$ αντιστοιχούν στους μιγαδικούς που έχουν εικόνες τα σημεία B και Γ του Σχήματος 1.20 τα οποία απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο A, οπότε η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του $|w|$ είναι

$$\begin{aligned} |w|_{min} &= AB = KA - KB = \sqrt{3^2 + 3^2} - \rho = 3\sqrt{2} - 2 \\ |w|_{max} &= A\Gamma = AK + K\Gamma = 3\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

Άσκηση 1.83 α) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του μέτρου των μιγαδικών

$$w = z - 1 + 3i$$

αν για τους μιγαδικούς z ισχύει

$$|z+2| = |z-2i| \qquad (i)$$

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός z για τον οποίο το $|w|$ γίνεται ελάχιστο.

Λύση

α) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.8 το

$$|w| = |z-(1-3i)|,$$

είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z από την εικόνα $A(1,-3)$ του μιγαδικού $1-3i$ και, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.9, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z είναι η μεσοκάθετος (ϵ) του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$ όπου $B(-2,0)$ και $\Gamma(0,2)$ οι εικόνες των $z_1 = -2$ και $z_2 = 2i$, αφού η (i) γράφεται

$$|z-(-2)| = |z-2i|,$$

οπότε η μικρότερη τιμή του $|w|$ είναι η μικρότερη τιμή της απόστασης των σημείων της ευθείας (ϵ) από το σημείο A.
Η εξίσωση της (ϵ) προκύπτει θέτοντας $z = x+yi$ στην (i):

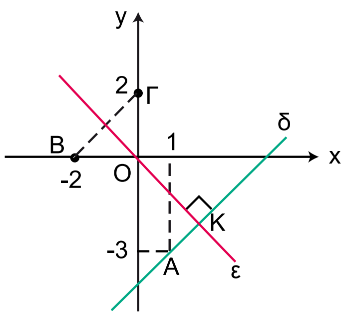
$$\begin{aligned} |x+yi-(-2)| = |x+yi-2i| \quad &\Leftrightarrow \quad |(x+2)+yi|^2 = |x+(y-2)i|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+4x+4+y^2 = x^2+y^2-4y+4 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x = -4y, \end{aligned}$$

οπότε η εξίσωση της (ϵ) είναι

$$(\epsilon): \ x+y=0. \qquad (ii)$$

Άρα, η μικρότερη τιμή του $|w|$, δηλαδή της απόστασης των σημείων της ευθείας (ϵ) από το σημείο A, προκύπτει από τη γνωστή σχέση απόστασης σημείου από ευθεία (βλ. Σχήμα 1.21)

$$|w|_{min} = AK = d(A,\epsilon) = \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$



Σχήμα 1.21 *Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z και η εικόνα A του μιγαδικού $z_1 = 1-3i$.*

β) Η εικόνα K του μιγαδικού z για τον οποίο το $|w|$ γίνεται ελάχιστο είναι το σημείο τομής της (ϵ) με την κάθετο (δ) από το A στην (ϵ), οπότε προκύπτει από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών (ϵ) και (δ) (βλ. Σχήμα 1.21).
Επειδή η ευθεία (δ) είναι κάθετη στην (ϵ),

$$\lambda_\epsilon = -\frac{1}{\lambda_\epsilon} = -\frac{1}{-1} = 1,$$

οπότε η εξίσωση της (δ) είναι (διέρχεται από το σημείο $A(1,-3)$)

$$(\delta): \ y-(-3) = 1(x-1) \ \Leftrightarrow \ y = x-4. \qquad (iii)$$

Λύνοντας το σύστημα των (ii) και (iii) προκύπτει ότι $K(2,-2)$, οπότε ο μιγαδικός z για τον οποίο το $|w|$ γίνεται ελάχιστο είναι ο $z = 2 - 2i$.

Άσκηση 1.84 α) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του μέτρου των μιγαδικών

$$u = z - w$$

αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύει

$$|z - 1 - 2i| = 1 \quad \text{και} \quad w = a + \left(\frac{a}{2} - 1\right)i, \quad a \in R \qquad (i)$$

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός w για τον οποίο το $|u|$ γίνεται ελάχιστο.

Λύση

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.8 το

$$|u| = |z - w|,$$

είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.
Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.9 ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z είναι ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $K(1,2)$ και ακτίνα 1.
Θέτοντας $w = x + yi$ η (i) δίνει

$$x + yi = a + \left(\frac{a}{2} - 1\right)i,$$

οπότε

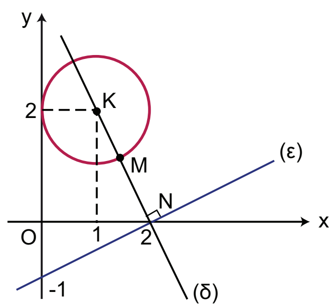
$$x = a \quad \text{και} \quad y = \frac{a}{2} - 1.$$

Απαλείφοντας το a από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών w είναι η ευθεία

$$(\epsilon):\ x - 2y - 2 = 0. \qquad (ii)$$

Επομένως, η μικρότερη τιμή του $|u|$ είναι η μικρότερη τιμή της απόστασης των σημείων της ευθείας (ϵ) και του κύκλου C, δηλαδή (βλ. Σχήμα 1.22) η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ του κύκλου από την ευθεία (ϵ), η οποία προκύπτει από τη γνωστή σχέση απόστασης σημείου από ευθεία

$$|u|_{min} = d(K,\epsilon) - \rho = KN - \rho = \frac{|1 - 2\cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5} - 1.$$



Σχήμα 1.22 *Οι γεωμετρικοί τόποι των μιγαδικών z και w.*

β) Η εικόνα N του μιγαδικού w για τον οποίο το $|u|$ γίνεται ελάχιστο είναι το σημείο τομής της (ϵ) με την κάθετο (δ) από το K στην (ϵ), οπότε προκύπτει από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών (ϵ) και (δ) (βλ. Σχήμα 1.22).
Επειδή η ευθεία (δ) είναι κάθετη στην (ϵ),

$$\lambda_\epsilon = -\frac{1}{\lambda_\epsilon} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2,$$

οπότε η εξίσωση της (δ) είναι (διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$)

$$(\delta):\ y - 2 = -2(x - 1) \ \Leftrightarrow\ y = 4 - 2x. \qquad (iii)$$

Λύνοντας το σύστημα των (ii) και (iii) προκύπτει $N(2,0)$, οπότε ο μιγαδικός w για τον οποίο το $|u|$ γίνεται ελάχιστο είναι ο $w = 2$.

Άσκηση 1.85 Να δειχθεί ότι

$$\sin^5\theta = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin 3\theta).$$

Λύση

Σύμφωνα με την (1.27), αν $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

οπότε από το ανάπτυγμα διωνύμου προκύπτει

$$\begin{aligned} \sin^5\theta &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{(2i)^5}\left(z^5 - 5z^4z^{-1} + 10z^3z^{-2} - 10z^2z^{-3} + 5zz^{-4} - z^{-5}\right) \\ &= \frac{1}{2^5 i^5}\left(z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}\right) \qquad (i) \\ &= \frac{1}{32i}\left[(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})\right]. \end{aligned}$$

Από την (1.27) προκύπτει

$$z - z^{-1} = 2i\sin\theta, \quad z^3 - z^{-3} = 2i\sin 3\theta \quad \text{και} \quad z^5 - z^{-5} = 2i\sin 5\theta,$$

οπότε η (i) δίνει

$$\sin^5\theta = \frac{1}{32i}(2i\sin 5\theta - 5\cdot 2i\sin 3\theta + 10\cdot 2i\sin 3\theta) = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin 3\theta).$$

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

Άσκηση 2.1 Να δειχθεί ότι για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ισχύει

α) $A^2 = 2A$ β) $A^{10} = 2^9 A$.

Λύση
α) Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

οπότε
$$A^2 = 2A.$$

β) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A = 2A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 2^2 A \\ A^4 &= A^3 A = 2^2 A \cdot A = 2^2 A^2 = 2^2 \cdot 2A = 2^3 A \end{aligned}$$

Μετά από κάποιες πράξεις

$$A^{10} = A^9 A = 2^8 AA = 2^8 A^2 = 2^8 \cdot 2A = 2^9 A.$$

Άσκηση 2.2 Να δειχθεί ότι για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

ισχύει
$$A^2 = \mathbf{0}.$$

Λύση
Για τον πίνακα A ισχύει

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ -1-2+3 & -2-4+6 & -3-6+9 \end{bmatrix} = 0$$

῎Ασκηση 2.3 Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^2 = A$, να δειχθεί ότι $(I - A)^2 = I - A$, όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (I-A)^2 &= I^2 - IA - AI + A^2 = I^2 - A - A + A^2 \\ &= I^2 - 2A + A^2 \end{aligned} \qquad (i)$$

όμως $A^2 = A$, οπότε η (i) γίνεται

$$I^2 - 2A + A = I - A$$

῎Ασκηση 2.4 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

να γραφεί ο πίνακας A^2 ως γραμμικός συνδυασμός των A και I, όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας, δηλαδή να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί k, m για τους οποίους ισχύει

$$A^2 = kA + mI. \qquad (i)$$

Λύση

Ισχύει

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+m & 2k \\ 0 & 3k+m \end{bmatrix}$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} k + m &= 1 \\ 2k &= 8 \\ 3k + m &= 9 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$k = 4 \quad \text{και} \quad m = -3$$

οπότε
$$A^2 = 4A - 3I.$$

῎Ασκηση 2.5 Να δειχθεί ότι για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ισχύει (I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας)

$$A^2 - 5A + 7I = \mathbf{0},$$

Λύση
Για τον πίνακα A ισχύει

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$A^2 - 5A + 7I = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Άσκηση 2.6 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+y \end{bmatrix}$$

Λύση
α) Έχουμε

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

όπου

$$a_{11} = -2, a_{12} = 6, a_{13} = 3$$

και

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26, \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7, \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16. \end{aligned}$$

Άρα

$$|A| = -2 \cdot 26 + 6 \cdot 7 - 3 \cdot 16 = -58.$$

β) Έχουμε

$$|B| = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = axy.$$

Άσκηση 2.7 Να δειχθεί ότι για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ισχύει
α) $AB = -BA$ β) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

Λύση
α) Ο πολλαπλασιασμός AB δίνει

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός BA δίνει

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$AB = -BA$$

β) $$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Από το ερώτημα (α), $AB = -BA$, οπότε

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 - BA + BA + B^2 = A^2 + B^2$$

Επομένως,

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2$$

Άσκηση 2.8 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ y & 0 \end{bmatrix},$$

να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε

$$A^2 + B^2 = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B^2 = \begin{bmatrix} -6y & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

οπότε, από τη σχέση

$$A^2 + B^2 = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6y & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} = 0$$

προκύπτει,

$$3x - 6y = 0 \Leftrightarrow x = 2y \qquad (i)$$

Επίσης,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$$

οπότε, από τη σχέση

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$$

προκύπτει,

$$xy = 8$$

η οποία λόγω και της (i) γίνεται

$$2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ή } y = -2$$

οπότε, οι τιμές των $x, y \in R$ είναι

$$(x = 4 \text{ και } y = 2) \text{ ή } (x = -4 \text{ και } y = -2)$$

Άσκηση 2.9 Να βρεθεί ο πίνακας X αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AXA^{-1} = B.$$

Λύση

Βρίσκουμε αρχικά τον πίνακα A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με A^{-1} και από δεξιά με A

$$A^{-1}AXA^{-1}A = A^{-1}BA,$$

οπότε

$$X = A^{-1}BA.$$

Επομένως,

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.10 Να βρεθεί ο πίνακας X αν

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

Ο πίνακας X είναι 2×2, οπότε

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

και η

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

γίνεται

$$\begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} - x_{12} & x_{12} + x_{22} + x_{11} \\ x_{11} + x_{21} - x_{22} & x_{12} + x_{22} + x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} - x_{12} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{11} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} - x_{22} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{21} &= -1 \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 5$$

οπότε, το σύστημα έχει λύση

$$X = A^{-1}B \qquad (i)$$

όπου
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 & -0,4 \\ -0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,2 & -0,6 & 0,2 \end{bmatrix}$$

και

$$B=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

η (i) δίνει

$$\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,2&0,6&0,2&-0,4\\-0,6&0,2&0,4&0,2\\0,2&-0,4&0,2&0,6\\0,4&0,2&-0,6&0,2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,4\\-0,2\\-0,6\\-0,2\end{bmatrix}$$

οπότε

$$x_{11}=1,4,\ x_{12}=-0,2,\ x_{21}=-0,6\ \text{ και }\ x_{22}=-0,2$$

και

$$X=\begin{bmatrix}1,4&-0,2\\-0,6&-0,2\end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.11 Αν

$$A=\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}$$

να υπολογιστεί, συναρτήσει των n, a, ο A^n.

Λύση
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}A^2&=\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2a\\0&1\end{bmatrix}\\A^3&=A^2A\\&=\begin{bmatrix}1&2a\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&3a\\0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$A^n=\begin{bmatrix}1&na\\0&1\end{bmatrix}. \qquad (i)$$

Για $n=1$ η (i) δίνει

$$A^1=\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}$$

που ισχύει εξ' υποθέσεως.
Έστω ότι η (i) ισχύει για $n=k$, δηλαδή ότι

$$A^k=\begin{bmatrix}1&ka\\0&1\end{bmatrix} \qquad (ii)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$ δηλαδή ότι

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix}1&(k+1)a\\0&1\end{bmatrix} \qquad (iii)$$

Λόγω της (ii)

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & a+ka \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα η (iii) ισχύει.
Επομένως η (i) ισχύει για κάθε ακέραιο n.

Άσκηση 2.14 Να βρεθούν οι πίνακες X και Y αν

$$X + 3Y = A \quad \text{και} \quad X - 2Y = B \tag{i}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Αφαιρώντας κατά μέλη τις

$$X + 3Y = A \quad \text{και} \quad X - 2Y = B$$

προκύπτει

$$X + 3Y - X + 2Y = A - B \Leftrightarrow 5Y = A - B \Leftrightarrow Y = \frac{1}{5}(A - B)$$

οπότε αντικαθιστώντας τους δεδομένους πίνακες παίρνουμε

$$Y = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0.75 & 1.25 \\ -1.25 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη των (i) προκύπτει

$$X = A - 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 0.75 & 1.25 \\ -1.25 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 3.25 \\ 1.75 & 1 & 4.5 \\ -1.5 & 1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.14 Να βρεθούν οι πίνακες X και Y αν

$$X + 3Y = A \quad \text{και} \quad X - 2Y = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις προκύπτει

$$5Y = A - B$$

Δηλαδή

$$Y = \frac{1}{5}(A - B).$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με 2 και τη δεύτερη εξίσωση με 3 και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$5X = 2A + 3B.$$

Δηλαδή

$$X = \frac{1}{5}(2A + 3B)$$

Οι πίνακες $A - B$ και $2A + 3B$ είναι

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 2A + 3B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 21 \\ -9 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 21 \\ -9 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 4 \\ 1 & 1 & \frac{21}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

και

$$Y = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.15 Να βρεθεί ο πίνακας $f(A)$ αν

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση

$$f(A) = A^2 + 3A + I_3 \qquad (i)$$

και

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 10 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει ($I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ο 3×3 μοναδιαίος)

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{bmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 10 & -4 & 16 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7+3\cdot 1+1 & -2 & 8+3\cdot 2 \\ 1+3\cdot 2 & 2+3\cdot 1+1 & 3(-1) \\ 10+3\cdot 3 & -4+3(-1) & 16+3\cdot 3+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -2 & 14 \\ 7 & 6 & -3 \\ 19 & -7 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.16 Να εξετασθεί αν είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση

Υπολογίζουμε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις.
Αρχικά, αλλάζουμε αμοιβαία την πρώτη με τη δεύτερη γραμμή, οπότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Έτσι, παίρνουμε

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας τη στη τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει, οπότε

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας τη στην τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή, προκύπτει

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Αλλάζοντας την τρίτη με την τέταρτη γραμμή, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή επί -2 και προσθέτοντας την στην τέταρτη, και πολλαπλασιάζοντας την τρίτη επί -1 και προσθέτοντας τη στην πέμπτη γραμμή δεν αλλάζει η τιμή της ορίζουσας

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας την τέταρτη γραμμή επί $-\frac{1}{3}$ και προσθέτοντας τη στην πέμπτη γραμμή, προκύπτει

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή είναι κάτω τριγωνική, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της,

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3\left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \neq 0$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.9 ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Ἀσκηση 2.17 α) Αν ο P είναι $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και

$$B = P^{-1}AP, \qquad (i)$$

να δειχθεί ότι

$$B^k = P^{-1}A^kP, \quad k = 2, 3, \ldots \qquad (ii)$$

β) Να δειχθεί ότι για τον πίνακα

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ισχύει

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (iii)$$

και να υπολογιστεί ο πίνακας K^8.

Λύση

α) Θα δείξουμε την (ii) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Για $n = 1$ η (ii) γίνεται $B = P^{-1}AP$ και ισχύει λόγω της (i).
- Υποθέτουμε ότι ισχύει η (ii) για $k = n$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k = n + 1$, δηλαδή ότι

$$B^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P. \qquad (iv)$$

Λόγω της (ii), που υποθέτουμε ότι ισχύει, της (i) και της προσεταιριστικής ιδιότητας

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= BB^n \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}A^nP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP \\ &= P^{-1}AA^nP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

οπότε η (iv) ισχύει.
Επομένως η (ii) ισχύει για κάθε $k = 2, 3, \cdots$.
β) Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς πινάκων διαδοχικά στο δεύτερο μέλος της (iii)

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= K
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ είναι

$$
\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},
$$

οπότε

$$
K = P^{-1}AP,
$$

όπου

$$
P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Έτσι, λόγω της (ii) και του (α),

$$
K^8 = P^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^8 P \tag{v}
$$

Ισχύει

$$
\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^8 = \begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & (-1)^8 \end{bmatrix},
$$

οπότε η (v) δίνει

$$
\begin{aligned}
K^8 &= P^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)P \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3^8}{2} & \frac{3^8}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3^8}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3^8}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{3^8}{2}-\frac{1}{2} & \frac{3^8}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.18 α) Να δειχθεί ότι αν για τον 2×2 πίνακα A ισχύει $A^2 = A$, τότε

$$(I + A)^n = I + (2^n - 1)A, \quad \text{για κάθε } n \in N^*, \tag{i}$$

όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας.

β) Να υπολογιστεί ο B^6 αν

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση

α) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
Για $n = 1$ η (i) γίνεται

$$I + A = I + (2^1 - 1)A \Leftrightarrow I + A = I + A\,,$$

οπότε είναι αληθής.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η (i) και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$, δηλαδή ότι

$$(I + A)^{n+1} = I + (2^{n+1} - 1)A. \tag{ii}$$

Λόγω της (i) και του ότι $A^2 = A$,

$$\begin{aligned}
(I + A)^{n+1} &= (I + A)^n (I + A) \\
&= (I + (2^n - 1)A)\,(I + A) \\
&= I + A + (2^n - 1)A + (2^n - 1)A^2 \\
&= I + A + (2^n - 1)A + (2^n - 1)A \\
&= I + [1 + 2(2^n - 1)]\,A \\
&= I + \left(2^{n+1} - 1)\right) A
\end{aligned}$$

οπότε η (ii) ισχύει.
Επομένως η (i) ισχύει για κάθε $n \in N^*$.
β) Ο B γράφεται

$$B = I + A\,,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με την (i)

$$\begin{aligned}
B^6 &= (I + A)^6 \\
&= I + (2^6 - 1)A \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^6 - 1)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 64 & 63 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.19 Να βρεθούν οι πίνακες X και Y αν

$$X \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση

Οι πίνακες X, Y είναι 2×1, οπότε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} [1\ \ 2] + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} [2\ \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 2x_1 \\ x_2 & 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 & y_1 \\ 2y_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2y_1 & 2x_1 + y_1 \\ x_2 + 2y_2 & 2x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Εξισώνοντας τα στοιχεία των πινάκων, προκύπτουν τα συστήματα

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_1 &= 1 \\ 2x_1 + y_1 &= 2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_2 + 2y_2 &= -1 \\ 2x_2 + y_2 &= 3 \end{aligned}$$

τα οποία δίνουν

$$x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ x_2 = \frac{7}{3} \text{ και } y_2 = -\frac{5}{3}$$

οπότε οι πίνακες X, Y είναι

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} \text{ και } Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.20 Να βρεθούν οι πίνακες X και Y αν

$$X + Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } X^2 - Y^2 = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες X, Y

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \$kai;\ Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X^2 = \begin{bmatrix} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} & x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} & x_{21}x_{12} + x_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} y_{11}^2 + y_{12}y_{21} & y_{11}y_{12} + y_{12}y_{22} \\ y_{21}y_{11} + y_{22}y_{21} & y_{21}y_{12} + y_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Από τις σχέσεις

$$X + Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } X^2 - Y^2 = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{matrix} x_{11} + y_{11} = 8 \\ x_{12} + y_{12} = 3 \\ x_{21} + y_{21} = 6 \\ x_{22} + y_{22} = 2 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} y_{11} = 8 - x_{11} \\ y_{12} = 3 - x_{12} \\ y_{21} = 6 - x_{21} \\ y_{22} = 2 - x_{22} \end{matrix} \qquad (i)$$

και

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} - y_{11}^2 - y_{12}y_{21} = 22 \\ x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} - y_{11}y_{12} - y_{12}y_{22} = 8 \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} - y_{21}y_{11} - y_{22}y_{21} = 16 \\ x_{21}x_{12} + x_{22}^2 - y_{21}y_{12} - y_{22}^2 = 6 \end{aligned} \qquad (ii)$$

Μετά από αντικατάσταση των (i) στις (ii) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} 3x_{21} + 6x_{12} + 16x_{11} = 104 \\ 3x_{11} + 10x_{12} + 3x_{22} = 38 \\ 6x_{11} + 10x_{21} + 6x_{22} = 76 \\ 3x_{21} + 6x_{12} + 4x_{22} = 28 \end{aligned}$$

το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 10 & 16 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 104 \\ 38 \\ 76 \\ 28 \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσα του A είναι

$$|A| = -800 \neq 0$$

και

$$|A_1| = -4000, \quad |A_2| = -1600 \quad |A_3| = -3200 \quad \text{και} \quad |A_4| = -800$$

οπότε

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4000}{-800} = 5 \\ x_{12} &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-1600}{-800} = 2 \\ x_{21} &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-3200}{-800} = 3 \\ x_{22} &= \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-800}{-800} = 1 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ στις (i) προκύπτουν

$$y_{11} = 3, \quad y_{12} = 1, \quad y_{21} = 3, \quad y_{22} = 1,$$

οπότε,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.21 Να δειχθεί ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει:

α) Ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ αντισυμμετρικός.

β) Κάθε τετραγωνικός πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Λύση

α) Έχει λάθος στην εκφώνηση του βιβλίου.
Ο ανάστροφος του πίνακα $A + A^T$ είναι

$$\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A,$$

οπότε ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός.

$$\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right),$$

οπότε ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.
β) Είναι φανερό ότι για κάθε πίνακα A ισχύει

$$\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A,$$

όπου, σύμφωνα με το (α), πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ αντισυμμετρικός, οπότε κάθε τετραγωνικός πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Άσκηση 2.22 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

α) Να δειχθεί ότι

$$A^4 = \beta I,$$

όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας και β σταθερά.

β) Να υπολογιστεί, συναρτήσει των n, a, ο A^n, $n \in N$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix} = -a^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -a^2 I$$

όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας, οπότε

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \left(-a^2 I\right)^2 = a^4 I^2 = a^4 I = \beta I, \text{ όπου } \beta \text{ σταθερά.}$$

β) Αν ο n είναι άρτιος, $n = 2k$, οπότε

$$A^n = A^{2k} = \left(A^2\right)^k = \left(-a^2 I\right)^k = (-1)^k a^{2k} I^k = (-1)^k a^{2k} I,$$

οπότε

$$A^n = (-1)^{\frac{n}{2}} a^n I, \quad n \text{ άρτιος.}$$

Αν ο n είναι περιττός, $n = 2k + 1$, οπότε

$$A^n = A^{2k+1} = \left(A^2\right)^k A = \left(-a^2 I\right)^k A = (-1)^k a^{2k} I^k A = (-1)^k a^{2k} A,$$

οπότε

$$A^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^{n-1} A, \quad n \text{ περιττός.}$$

Άσκηση 2.23 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

να δειχθεί ότι

$$A^{n+2} = A^n, \quad \text{για κάθε } n \in N^*. \qquad (i)$$

Λύση

α) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Επομένως η (i) ισχύει για $n = 1$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η (i) και θα δείξουμε ότι ισχύει η

$$A^{(n+1)+2} = A^{n+1}\ .$$

ή

$$A^{n+3} = A^{n+1}\ . \qquad (ii)$$

Λόγω της (i),

$$\begin{aligned} A^{n+3} &= A^{n+2}A \\ &= A^n A \\ &= A^{n+1}, \end{aligned}$$

οπότε η (ii) ισχύει.
Άρα, η (i) ισχύει για κάθε $n \in N^*$.

Άσκηση 2.24 Να βρεθεί ο βαθμός των παρακάτω πινάκων

$\alpha)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\beta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\gamma)\ A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$\delta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\epsilon)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma\tau)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\zeta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\eta)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

α) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσα του πίνακα είναι 3 και μια 3×3 ορίζουσα της είναι η

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 3.$$

β) Η ορίζουσα του τετραγωνικού αυτού πίνακα είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Επίσης, υπάρχει 2×2 υποπίνακας με μη μηδενική ορίζουσα, την

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

γ) Η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα είναι

$$|A| = -4\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

και μία 2×2 ορίζουσα είναι μη μηδενική

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 2.$$

δ) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας είναι 3, όμως όλοι οι 3×3 υποπίνακες του A έχουν ορίζουσα μηδέν. Επίσης, υπάρχει 2×2 υποπίνακας με ορίζουσα μη μηδενική.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 2.$$

ε) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας είναι 3, όμως όλοι οι 3×3 υποπίνακες του A έχουν ορίζουσα μηδέν. Επίσης, υπάρχει 2×2 υποπίνακας με ορίζουσα μη μηδενική.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 2.$$

στ) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας είναι 3 και μια 3×3 ορίζουσα της είναι η

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 3$$

ζ) Η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 3$$

η) Η 3×3 ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα είναι $|A| = 0$, όμως υπάρχει 2×2 ορίζουσα η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 2$$

Άσκηση 2.25 α) Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & a & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & a & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & a \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι

$$AA^T = kI$$

όπου I ο 4×4 μοναδιαίος πίνακας και k σταθερά.

β) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του A, συναρτήσει των a, β, γ, δ.

Λύση

α) Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} a & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & a & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & a & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & a & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & a & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \end{bmatrix} \\ &= (a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) I \end{aligned}$$

οπότε

$$k = a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

β) Λόγω του (α)

$$|AA^T| = |kI|$$

ή

$$|A||A^T| = k|I|$$

ή

$$|A||A| = k \cdot 1$$

ή

$$|A|^2 = k$$

ή

$$|A| = \sqrt{k}$$

ή

$$|A| = \sqrt{a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Άσκηση 2.26 Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων:

$a)\ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \beta)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \gamma)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\delta)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \epsilon)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -10 & -1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma\tau)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

α) Η ορίζουσα του A υπολογίζεται ότι είναι $|A| = 2 \neq 0$, οπότε ο αντίστροφος του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

β) Η ορίζουσα του A είναι

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

γ) Η ορίζουσα του A είναι $|A| = -1$ και οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

δ) Η ορίζουσα του A είναι $|A| = 1$ και οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ε) Η ορίζουσα του A είναι $|A| = -138$, οπότε ο αντίστροφος είναι

$$A^{-1} = -\frac{1}{138}\begin{bmatrix} -58 & -39 & 50 & 23 \\ 46 & 69 & -92 & -23 \\ 118 & 27 & -116 & -23 \\ -18 & -24 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,42 & 0,28 & -0,36 & -0,17 \\ -0,33 & -0,5 & 0,67 & 0,17 \\ -0,86 & -0,2 & 0,84 & 0,17 \\ 0,13 & 0,17 & -0,04 & 0 \end{bmatrix}$$

στ) Όμοια ($|A| = 1$), προκύπτει ότι ο αντίστροφος του πίνακα A είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.27 Να βρεθεί ο βαθμός των παρακάτω πινάκων

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma)\ \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \delta)\ \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon)\ E = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση

α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A αναπτύσσοντάς την ως προς τα στοιχεία της τελευταίας στήλης της.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = 4.$$

β) Ο βαθμός του πίνακα B είναι 2, διότι $|B| = 0$, δεν υπάρχει 3×3 υποπίνακας του B με μη μηδενική ορίζουσα και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

γ) Ο βαθμός του πίνακα Γ είναι 2, διότι $|\Gamma| = 0$, οι ορίζουσες όλων των 3×3 υποπινάκων του Γ είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 2×2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

δ) Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα Δ προκύπτει ότι είναι μηδέν. Επίσης υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 3×3 του Δ, οπότε

$$rank(\Delta) = 3.$$

ε) Ο βαθμός του πίνακα E είναι 2, διότι $|E| = 0$, οι ορίζουσες όλων των 3×3 υποπινάκων του E είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 2×2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Άσκηση 2.28 Για τον $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι:

α) $A^2 = nA$.

β) $(I - A)\left(I - \frac{1}{n-1}A\right) = I + A, \quad n \geq 2.$

γ) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $B = I - A$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του συναρτήσει του n.

Λύση

α)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \\ &= nA \end{aligned}$$

β) Λόγω του (α)

$$\begin{aligned} (I - A)\left(I - \frac{1}{n-1}A\right) &= I - \frac{1}{n-1}A - A + \frac{1}{n-1}A^2 \\ &= I - \frac{1}{n-1}A + \frac{1}{n-1}nA \\ &= I + \left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)A \\ &= I + A \end{aligned}$$

γ) Από το (β) προκύπτει ότι

$$(I - A)\left(I - \frac{1}{n-1}A\right)(I + A)^{-1} = (I + A)(I + A)^{-1} \Leftrightarrow (I - A)\left[\left(I - \frac{1}{n-1}A\right)(I + A)^{-1}\right] = I.$$

Επίσης

$$\left[\left(I - \frac{1}{n-1}A\right)(I + A)^{-1}\right](I - A) = I.$$

Άρα ο $B = I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο πίνακας

$$\left[\left(I - \frac{1}{n-1}A\right)(I + A)^{-1}\right].$$

Άσκηση 2.29 α) Να γραφεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

στη μορφή $A = B - I$, όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας, και να δειχθεί ότι

$$B^2 = 5B.$$

β) Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση

α) Επειδή $A = B - I$,

$$\begin{aligned} B &= A + I \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ &= 5B \end{aligned}$$

β) Λόγω του (α)

$$\begin{aligned} B^2 = 5B &\Leftrightarrow (A+I)^2 = 5(A+I) \\ &\Leftrightarrow A^2 + 2A + I = 5A + 5I \\ &\Leftrightarrow A^2 - 3A = -I + 5I \\ &\Leftrightarrow A(A - 3I) = 4I \\ &\Leftrightarrow A\left[\frac{1}{4}(A - 3I)\right] = I \end{aligned}$$

Επίσης,

$$B^2 = 5B \Leftrightarrow \left[\frac{1}{4}(A - 3I)\right] A = I.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}(A-3I) \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.30 Αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

α) Να δειχθεί ότι A είναι αντιστρέψιμος και ταυτίζεται με τον αντίστροφό του.
β) Να υπολογιστεί ο A^n, $n \in N$.

Λύση

α) Η ορίζουσα του A είναι

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος.
Ο αντίστροφος του A είναι

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|}adj(A) \\ &= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

β) Λόγω και του (α)

$$A^2 = AA = AA^{-1} = I,$$

όπου I ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας. Έτσι

- Αν ο n είναι άρτιος, $n = 2k,\ k \in N$, οπότε, λόγω και του (α)

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I.$$

- Αν ο n είναι περιττός, $n = 2k+1,\ k \in N$, οπότε

$$A^n = A^{2k+1} = (A^2)^k A = I^k A = IA = A.$$

῾Ασκηση 2.31 Αν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός $n \times n$ πίνακα A είναι μηδέν και όλα τα άλλα 1 ($a_{ij} = 0$, αν $i = j$ και $a_{ij} = 1$, αν $i \neq j$):
α) Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.
β) Να δειχθεί ότι

$$A^{-1} = \frac{2-n}{n-1} I + \frac{1}{n-1} A,$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

Λύση
Στην λύση της άσκ. 3.28α δείχνουμε ότι

$$(A+I)^2 = n(A+I),$$

οπότε

$$A^2 + I^2 + 2IA = nA + nI$$

ή
$$A^2 + I + 2A = nA + nI$$

ή
$$A^2 + 2A - nA = nI - I$$

ή
$$A^2 + (2-n)A = (n-1)I$$

ή
$$A[A + (2-n)I] = (n-1)I$$

ή
$$A\left(\frac{A+(2-n)I}{n-1}\right) = I$$

Επίσης
$$\left(\frac{A+(2-n)I}{n-1}\right)A = I$$

οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \frac{A+(2-n)I}{n-1} = \frac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I$$

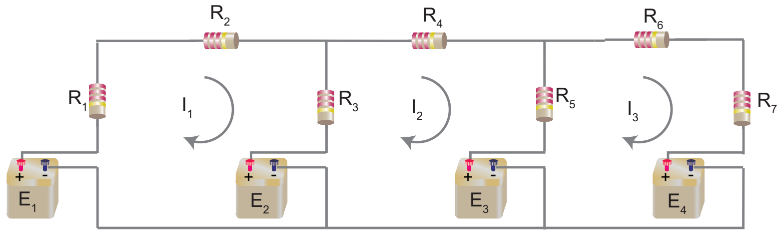
῾Ασκηση 2.32 Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff προκύπτει ότι για τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 των βρόγχων του κυκλώματος του σχήματος ισχύει (μέθοδος βρόγχων)

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5+R_6+R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1+E_2 \\ -E_2-E_3 \\ E_3-E_4 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα I_1, I_2, I_3 αν

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1K\Omega$$

και
$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 10V.$$



Λύση
Για τις τιμές αυτές από την δοσμένη σχέση προκύπτει το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα του συστήματος αυτού είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

οπότε η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} &= A^{-1}\begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 100 \\ -120 \\ -40 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε οι ζητούμενες τιμές των ρευμάτων είναι

$$I_1 = 4,76mA,\ I_2 = -5,71mA,\ I_3 = -1,90mA$$

(όταν σε μια σχέση σε ένα κύκλωμα η μονάδα αντίστασης είναι $K\Omega$ και της τάσης V, τότε η μονάδα έντασης ρεύματος είναι mA).

Άσκηση 2.33 Να βρεθούν οι τιμές λ για τις οποίες υπάρχει μη μηδενικός πίνακας-στήλη X τέτοιος ώστε

$$AX = \lambda X \qquad (i)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

και για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο X.

Λύση

Η (i) γράφεται

$$AX - \lambda X = 0 \ \Leftrightarrow\ (A - \lambda I)X = 0, \qquad (ii)$$

όπου I ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

Το ομογενές σύστημα (ii) έχει μη μηδενικές λύσεις αν η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

είναι μηδέν, δηλαδή αν

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ή (αναπτύσσοντας την ορίζουσα και μετά από λίγες πράξεις)

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)=0.$$

Επομένως, οι ζητούμενες τιμές της λ είναι

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0 \ \text{ και } \ \lambda_3=1.$$

Για να βρούμε την αντίστοιχη της τιμής $\lambda_1=-1$ λύση του συστήματος, θέτουμε $\lambda=-1$ στην (ii), οπότε προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 & -1 \\ 1 & -1-(-1) & 0 \\ 2 & -2 & -(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ή

$$\begin{aligned} 2x+2y-z &= 0 \\ x &= 0 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό εύκολα προκύπτει ότι

$$x=0,\ \text{ και } \ z=2y,$$

οπότε οι αντίστοιχες της $\lambda_1=-1$ λύσεις είναι

$$(x,y,z)=(0,k,2k),\ \ k\in R.$$

Όμοια προκύπτει ότι οι αντίστοιχες των $\lambda_2=0$ και $\lambda_3=1$ λύσεις είναι αντίστοιχα

$$(x,y,z)=(k,k,3k),\ \ k\in R$$
$$(x,y,z)=(2k,k,2k),\ \ k\in R.$$

Άσκηση 2.34 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο βρόγχων σε ένα κύκλωμα με αντιστάσεις

$$R_1=2\Omega, R_2=8\Omega, R_3=6\Omega, R_4=6\Omega, R_5=4\Omega$$

και πηγές $E_1=10V$, $E_2=-10V$ και $E_2=5V$, προκύπτει η εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{R}X=\mathbf{V}, \qquad (i)$$

όπου $X=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας των άγνωστων ρευμάτων, $\mathbf{V}=\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας των τάσεων των πηγών και

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_5 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των αντιστάσεων του κυκλώματος.
Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3.

Λύση

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{184}\begin{bmatrix} 44 & 32 & 48 \\ 32 & 40 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix} = \frac{1}{46}\begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^{-1}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{46}\begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,96 \\ 1,20 \\ 3,04 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.35 Να βρεθεί ο βαθμός των παρακάτω πινάκων

$$\alpha)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \delta)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση

α) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι 3 διότι (ανάπτυγμα ως προς την τρίτη γραμμή)

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

β) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι 2, διότι (ανάπτυγμα ως προς την τρίτη γραμμή)

$$|A| = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank A = 2.$$

γ) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι 3, διότι (ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς την τέταρτη γραμμή, που περιέχει δύο μηδενικά)

$$
\begin{aligned}
|A| &= -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \left(2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&= 5 \cdot 2 + 3(-2-1) - 2 \cdot 2 - (-2-1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

και υπάρχει 3×3 υποπίνακας του Α με μη μηδενική ορίζουσα (παραλείποντας την πρώτη γραμμή και την τέταρτη στήλη του)

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,
$$

οπότε

$$
rankA = 3.
$$

δ) Η ορίζουσα του πίνακα

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

είναι (ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή)

$$
\begin{aligned}
|A| &= -\begin{vmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(-1)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Επίσης οι ορίζουσες όλων των 3×3 υποπινάκων του Α είναι μηδέν και

$$
\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,
$$

οπότε

$$
rankA = 2.
$$

Άσκηση 2.36 α) Να βρεθεί ο βαθμός και ο αντίστροφος του πίνακα

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}
$$

β) Να δειχθεί ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση

α) Η ορίζουσα του Α υπολογίζεται ότι είναι

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,
$$

οπότε ο βαθμός του Α είναι 3.

β) Επειδή $|A| \neq 0$, ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος.

Βρίσκουμε τον αντίστροφό του εφαρμόζοντας τη γνωστή διαδικασία.

Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων του Α είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -11 \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -2 \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

οπότε ο συμπληρωματικός του A είναι

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

και αντίστροφός του είναι ο

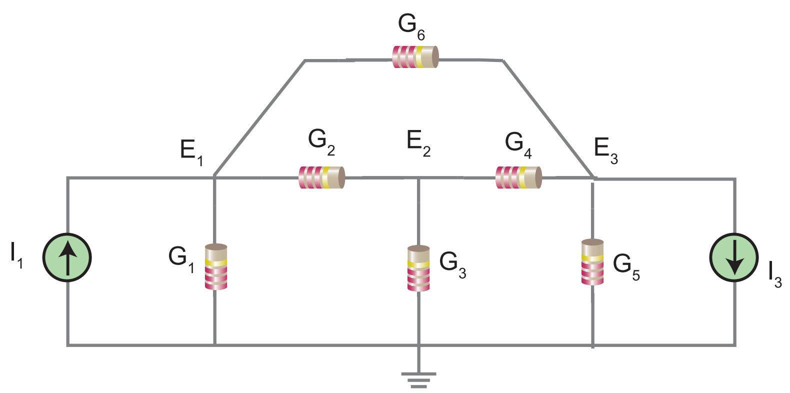
$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.38 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο κόμβων προκύπτει ότι για τα δυναμικά E_1, E_2, E_3 των κόμβων του κυκλώματος του σχήματος ισχύει

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_6 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 \\ -G_6 & -G_4 & G_4+G_5+G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα E_1, E_2, E_3 αν

$G_1 = G_2 = G_3 = 1mS, G_4 = G_5 = G_6 = 2mS$ και $I_1 = I_2 = 2mA$.



Λύση

Για τις τιμές αυτές από τη δοσμένη σχέση προκύπτει το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα του συστήματος αυτού είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 14 & 8 \\ 10 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

οπότε η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 14 & 8 \\ 10 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

οπότε οι ζητούμενες τιμές των δυναμικών των κόμβων είναι

$$E_1 = \frac{20}{30} = 0,677\,V,\ E_2 = \frac{-8}{30} = -0,267\,V,\ E_3 = \frac{4}{30} = 0,133\,V.$$

(όταν σε μια σχέση σε ένα κύκλωμα η μονάδα έντασης ρεύματος είναι mA και η μονάδα αγωγιμότητας mS, τότε η μονάδα δυναμικού είναι V).

Άσκηση 2.39 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο βρόχων για το κύκλωμα του σχήματος με αντιστάσεις $R_1 = 2\Omega, R_2 = 8\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = 6\Omega, R_5 = 4\Omega$ και πηγές $E_1 = 40V$ και $E_2 = 20V$, προκύπτει η εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{R}X = \mathbf{V}, \qquad (i)$$

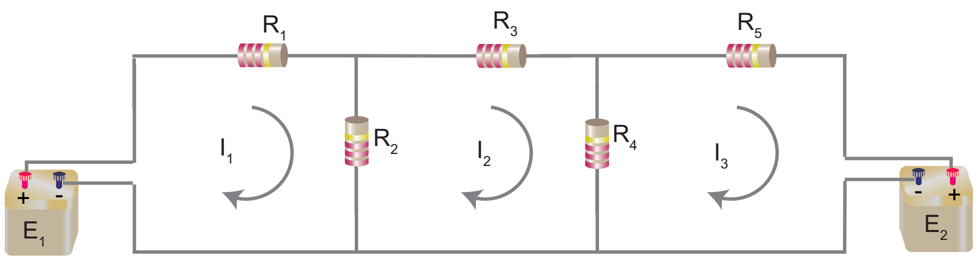
όπου

$$X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των ρευμάτων των βρόχων και των τάσεων των πηγών και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των αντιστάσεων.
Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3.



Λύση
Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων στον $\mathbf{R}$ προκύπτει

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{R}$ υπολογίζεται

$$|A| = 1000,$$

οπότε ο $\mathbf{R}$ είναι αντιστρέψιμος.
Πολλαπλασιάζοντας την (i) από αριστερά επί τον $\mathbf{R}^{-1}$ προκύπτει

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}X = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V} \Leftrightarrow X = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}. \qquad (ii)$$

Βρίσκουμε τον $\mathbf{R}^{-1}$ με τον γνωστό τρόπο:
Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων του $\mathbf{R}$ είναι

$$|\mathbf{R}_{11}| = \begin{vmatrix} 20 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 164 \quad |\mathbf{R}_{12}| = \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = -80 \quad |\mathbf{R}_{13}| = \begin{vmatrix} -8 & 20 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 48$$

$$|\mathbf{R}_{21}| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = -80 \quad |\mathbf{R}_{22}| = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 100 \quad |\mathbf{R}_{23}| = \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -60$$

$$|\mathbf{R}_{31}| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 20 & -6 \end{vmatrix} = 48 \quad |\mathbf{R}_{32}| = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = -60 \quad |\mathbf{R}_{33}| = \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 136$$

οπότε ο συμπληρωματικός του $\mathbf{R}$ είναι

$$adj(R) = \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{21} & R_{31} \\ -R_{12} & R_{22} & -R_{32} \\ R_{13} & -R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164 & 80 & 48 \\ 80 & 100 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix}$$

οπότε ο αντίστροφος του $\mathbf{R}$ είναι ($|A| = 1000$)

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 164 & 80 & 48 \\ 80 & 100 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix}$$

Έτσι η (ii) δίνει

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 164 & 80 & 48 \\ 80 & 100 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 164 \cdot 40 + 80 \cdot 20 \\ 80 \cdot 40 + 100 \cdot 20 \\ 48 \cdot 40 + 60 \cdot 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8,16 \\ 5,2 \\ 3,12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$I_1 = 8,16\,A, \quad I_2 = 5,2\,A, \quad I_3 = 3,12\,A.$$

Επομένως $\vec{u} = -6\vec{a} + 3\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}.$

Άσκηση 2.40 Για ένα κύκλωμα που περιέχει δύο αντιστάσεις $R_1 = 10\Omega$ και $R_2 = 5\Omega$, δύο πηνία με αυτεπαγωγές $L = 2\cdot 10^{-4}H$, πυκνωτή χωρητικότητας $C = 10^{-6}F$ και τις αρμονικές πηγές

$$v_1 = 4\cos\omega t\ (V)\ \text{ και }\ v_2 = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\ (V)\ \text{ όπου }\ \omega = 10^5\,\frac{r}{s},$$

από τη μέθοδο βρόχων προκύπτει για τα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη η εξίσωση

$$\mathbf{Z}X = \mathbf{V}, \qquad (i)$$

όπου

$$X = \begin{bmatrix} \widetilde{I}_1 \\ \widetilde{I}_2 \\ \widetilde{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \widetilde{v}_1 \\ 0 \\ \widetilde{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{i\omega t} \\ 0 \\ 3e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4})} \end{bmatrix}$$

οι πίνακες των μιγαδικών ρευμάτων βρόχων και τάσεων πηγών και

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1 + iL\omega & -iL\omega & 0 \\ -iL\omega & iL\omega - \dfrac{i}{C\omega} + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + iL\omega \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των σύνθετων μιγαδικών αντιστάσεων.
Να βρεθούν τα μιγαδικά ρεύματα $\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2$ και $\widetilde{I}_3$ και στη συνέχεια ρεύματα I_1, I_2 και I_3 που διαρρέουν τους βρόγχους του κυκλώματος.

Λύση

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων στον πίνακα $\mathbf{Z}$ προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} 10 + i2\cdot 10^{-4}\cdot 10^5 & -i2\cdot 10^{-4}\cdot 10^5 & 0 \\ -i2\cdot 10^{-4}\cdot 10^5 & i2\cdot 10^{-4}\cdot 10^5 - \dfrac{i}{10^{-6}\cdot 10^5} + 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 + i2\cdot 10^{-4}\cdot 10^5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10+20i & -20i & 0 \\ -20i & 20i - 10i + 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5+20i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+20i & -20i & 0 \\ -20i & 5+10i & -5 \\ 0 & -5 & 5+20i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Από την (i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}X &= \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0.036+0.017i & 0.045+0.048i & 0.014-0.008i \\ 0.045+0.048i & 0.069+0.026i & 0.01-0.015i \\ 0.014-0.0076i & 0.01-0.015i & 0.009-0.05i \end{vmatrix}\begin{bmatrix} 4\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) \\ 0 \\ 3\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,19\cos\omega t - 0,08\sin\omega t + i\left(0,08\cos\omega t + 0,19\sin\omega t\right) \\ 0,17\cos\omega t - 0,121\sin\omega t + i\left(0,121\cos\omega t + 0,17\sin\omega t\right) \\ 0,18\cos\omega t + 0,114\sin\omega t + i\left(-0,114\cos\omega t + 0,18\sin\omega t\right) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

οπότε τα ρεύματα των βρόγχων είναι

$$\begin{aligned} I_1 &= Re(\widetilde{I}_1) = 0,19\cos\omega t - 0,08\sin\omega t \\ I_2 &= Re(\widetilde{I}_1) = 0,17\cos\omega t - 0,121\sin\omega t \\ I_1 &= Re(\widetilde{I}_1) = 0,18\cos\omega t + 0,114\sin\omega t \end{aligned}$$

Άσκηση 2.41 Αν

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

α) Να δειχθεί ότι

$$(A - aI_3)^3 = \mathbf{0}, \quad \text{για κάθε } a \in R,$$

όπου I_3 ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

β) Αν $a \neq 0$, να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1}.

Λύση

α) $$B = A - aI_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$B^3 = B^2 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

β) Ο πίνακας Α είναι άνω τριγωνικός, οπότε η ορίζουσά του είναι το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Άρα, αν $a \neq 0$, $|A| \neq 0$, οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A). \qquad (i)$$

Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων του Α είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \qquad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

οπότε ο συμπληρωματικός του Α είναι

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{a^3}\begin{bmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.43 Να βρεθεί ο πίνακας X αν

$$A^{-1}XA = B, \qquad (i)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (i) επί A^{-1} από δεξιά και επί A από αριστερά προκύπτει (λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας),

$$\begin{aligned} A\left(A^{-1}XA\right)A^{-1} = ABA^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(AA^{-1}\right)X\left(AA^{-1}\right) = ABA^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad IXI = ABA^{-1} \end{aligned}$$

οπότε

$$X = ABA^{-1}. \qquad (i)$$

Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned} X &= ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 7 & 7 \\ -56 & 9 & 10 \\ -167 & 30 & 29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά συστήματα

Άσκηση 3.2 Να λυθούν τα συστήματα που αντιστοιχούν στους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση

- Ο πίνακας A αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_3 = -1 \\ &x_2 - 4x_3 = 0 \\ &x_4 = -3 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = -4x_3 - 1, \quad x_2 = 4x_3 \quad \text{και} \quad x_4 = -3,$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι ($x_3 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4k - 1, 4k, k, -3), \quad k \in R$$

- Ο πίνακας B αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 = 6 \\ &x_2 = -3 \\ &x_3 = 2 \end{aligned}$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι ($x_4 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, -3, 2, k), \quad k \in R$$

- Ο πίνακας Γ αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 = 0 \\ &x_3 = 0 \\ &0 = 1 \end{aligned}$$

οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

- Ο πίνακας Δ αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ &0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -3 \\ &0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2 \end{aligned}$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 2)$$

Άσκηση 3.3 Να λυθούν τα συστήματα

$\alpha)$ $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$

$\beta)$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$
$-2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$

$\gamma)$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + 5x_3 = 7$
$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$-x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7$

$\delta)$ $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + x_3 = 1$

$\epsilon)$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$
$-2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3$

$\sigma\tau)$ $y + 2z + w = 0$
$2x + z = 2$
$y + w = 1$

$\zeta)$ $x_1 - x_3 = 1$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$

$\eta)$ $x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0$
$-2x_1 + x_2 - 5x_4 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$\theta)$ $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$-4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$

$\iota)$ $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$
$-4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$
$6x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0$

α) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A προκύπτει

$$|A| = 0$$

Επίσης, η 2×2 ορίζουσα που προκύπτει διαγράφοντας την τρίτη γραμμή και την τρίτη στήλη.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε,

$$rank(A) = 2$$

όμως,

$$rank(A|B) = 3$$

εφόσον η υποορίζουσα του επαυξημένου

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Δηλαδή $rank(A) \neq rank(A|B)$, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση

β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή $Ax = B$ όπου,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$rank(A|B) = 3$ επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

όμως

$$rank(A) = 2 \ \text{ αφού } \ |A| = 0 \ \text{ και } \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

οπότε το σύστημα δεν έχει λύση
γ) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας έχει ορίζουσα

$$|A|B| = 0$$

και μια 3×3 υποορίζουσα του πίνακα A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Λύνουμε, λοιπόν, το παρακάτω σύστημα (αντιστοιχεί στην παραπάνω μη μηδενική υποορίζουσα)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει η λύση του συστήματος

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

(οι τιμές αυτές ικανοποιούν, βεβαίως και την τρίτη εξίσωση).
γ) σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση.
Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 37 & \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-2) \\ \sim \\ H_{41}(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 00 \\ 3 & 4 & 7 & \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$H_2\left(\frac{1}{3}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{12}(2) \\ \sim \\ H_{32}(-3) \\ H_{42}(-3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_3\left(-\frac{1}{7}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{23}\left(-\frac{4}{3}\right) \\ \sim \\ H_{13}\left(-\frac{11}{3}\right) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια 2×2 υποορίζουσα του επαυξημένου και του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A|B) = rank(A) = 2$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βρίσκουμε τα x_1, x_2 συναρτήσει του x_3)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 + x_3 \\ x_1 - x_2 &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$2x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

οπότε η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$x_2 = x_3$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος (θέτοντας $x_3 = k$) είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, k, k), \; k \in R$$

ε) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

όλες οι 2×2 υποοορίζουσες του είναι μηδενικές οπότε

$$rank(A) = 1$$

και μια 2×2 υποορίζουσα του επαυξημένου είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

οπότε

$$rank(A|B) = 2$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύση (αφού $rank(A) \neq rank(A|B)$).
στ) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια 2×3 υποορίζουσα του A και του $A|B$ είναι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βλ Πρόταση 3.13) (βρίσκουμε το x, y, z συναρτήσει του w)

$$\begin{aligned} &y + 2z = -w \\ &2x + z = 2 \\ &y = 1 - w \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση το y (τρίτη εξίσωση) προκύπτει

$$z = -\frac{1}{2}$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη το z

$$x = \frac{5}{4}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $w = k$)

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{5}{4}, 1 - k, -\frac{1}{2}, k\right), \quad k \in R$$

ζ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Μια 3×3 υποορίζουσα του A και του A.B είναι

όπου
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{4}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-7}{4}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{3}{4}$$

η) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

το σύστημα είναι ομογενές, επομένως έχει λύση (αφού $rank(A) = rank(A|B)$)
Μια μη μηδενική ορίζουσα του πίνακα A είναι η

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε βρίσκουμε τους x_1, x_2, x_3 συναρτήσει του x_4

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3x_4 \\ &-2x_1 + x_2 = 5x_4 \\ &3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτουν οι λύσεις του συστήματος (θέτοντας $k = x_4$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17k, -29k, 11k, k)$$

θ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η 3×3 ορίζουσα του A είναι μηδενική, όπως και όλες οι 2×2 υποορίζουσες, επομένως

$$rank(A) = 1$$

Βρίσκουμε το x_1 συναρτήσει των x_2 και x_3 από την πρώτη εξίσωση

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_2 = k$ και $x_3 = l$)

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l, k, l\right)$$

ι) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι 3×3 και οι 2×2 υποορίζουσες του είναι μηδενικές, οπότε
$rank(A) = 1 = rank(A|B)$ (ομογενές)
Βρίσκουμε το x_1 συναρτήσει των x_2, x_3, x_4

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι θέτοντας $x_2 = k, x_3 = 1, x_4 = m$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l + m, k, l, m\right)$$

Άσκηση 3.4 Να λυθούν τα συστήματα

α) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 - x_2 + 5x_3 = -3$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

β) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$
$4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2$

γ) $-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = -4$
$3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2$

δ) $x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10$
$-x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4$
$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6$

ϵ) $2x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0$
$x_1 + x_2 = 0$
$3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0$
$-x_1 - x_2 = 0$

$\sigma\tau$) $x_1 + x_2 + x_4 = 0$
$x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$-x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

ζ) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + 5x_3 = 7$

Λύση

α) Το σύστημα γράφεται στην μορφή

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.13, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} \tag{i}$$

όπου

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

Έτσι, οι (i) δίνουν

$$x_1 = \frac{24}{24} = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{24}{24} = -1$$

β) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και μια 3×3 υποορίζουσα του είναι η

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

οπότε $$rank(A|B) = 3$$

όμως όλες οι 3×3 υποορίζουσες του πίνακα A είναι μηδενικές, οπότε

$$rank(A) \neq 3$$

Εφόσον, $$rank(A) \neq rank(A|B)$$

Επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 3.12 το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Μια μη μηδενική 3×3 υποορίζουσα του πίνακα A και του επαυξημένου $A|B$ είναι

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B).$$

Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε τους 3 αγνώστους συναρτήσει των άλλων δύο π.χ τους x_1, x_3, x_5 συναρτήσει των x_2, x_4 από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_3 + x_5 &= -4 - 2x_2 + 3x_4 & (i) \\ 3x_1 - x_3 + x_5 &= 5 - x_4 + 3x_2 & (ii) \\ x_1 + 2x_3 + 3x_5 &= 2 + x_2 + 2x_4 & (iii) \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις (i) και (ii) κατά μέλη και πολλαπλασιάζοντας την (ii) επί -3 και προσθέτοντας τη στην (iii) προκύπτει

$$\begin{aligned} -5x_1 + 4x_3 &= -9 - 5x_2 + 4x_4 & (iv) \\ -8x_1 + 5x_3 &= -13 + 5x_4 - 8x_2 & (v) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (iv) επί -5 και την (v) επί 4 και προσθέτωντας αυτές που προκύπτουν έχουμε

$$x_1 = 1 + x_2$$

Αντικαθιστώντας το x_1 στην (v) έχουμε

$$x_3 = -1 + x_4$$

Αντικαθιστώντας τα x_1 και x_3 στην (i) προκύπτει

$$x_5 = 1$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_2 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + k, k, m - 1, m, 1) \quad k, m \in R$$

δ) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

και μια 3×3 υποορίζουσα του A είναι

$$AX = B$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τους τρεις αγνώστους συναρτήσει των άλλων δύο. Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x_3, x_4, x_5 προκύπτει

$$\begin{aligned} -x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -4 + x_1 + 2x_2 \\ -2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 - 2x_1 - 4x_2 \qquad (i) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες κατά μέλη και πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη επί 2 και προσθέτοντας στην τρίτη εξίσωση προκύπτουν

$$\begin{aligned} 2x_4 + 4x_5 &= 6 \\ x_5 &= 2 \end{aligned} \qquad (ii)$$

Αντικαθιστώντας το x_5 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_4 = -1.$$

Αντικαθιστώντας τα x_4, x_5 στην (i) έχουμε

$$x_3 = -3 + x_1 + 2x_2$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι θέτοντας $x_1 = k$ και $x_2 = m$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (k, m, -3 + k + 2m, -1, 2)$$

ε) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι ομογενές, οπότε έχει λύση.
Επειδή

$$|A| = 0$$

και όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι μηδενικές, όμως η 2×2 υποορίζουσα του A

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2 συναρτήσει των x_3, x_4 (από τις δυο πρώτες εξισώσεις)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= -5x_3 + 5x_4 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x_2 = -x_1$ αντικαθιστώντας στην πρώτη, προκύπτει

$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_1 &= -5x_3 + 5x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$x_2 = -x_1 = x_4 - x_3,$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - m, m - k, k, m) \quad k, m \in R$$

στ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του A είναι

$$|A| = 0$$

Επίσης, όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι μηδενικές.
Μια 2×2 υποορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 2 = rank(A|B) \text{ (ομογενές)}$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2 συναρτήσει των x_3, x_4. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτουν

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -x_4 \\ x_2 &= -x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το x_2 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_1 = x_3 - 2x_4$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - 2m, m - k, k, m), \quad k, m \in R.$$

ζ) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 21$$

και η λύση του, με τον τρόπο του (α), προκύπτει

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

ζ) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Επειδή
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

$$rankA = rank(A|B) = 3,$$

οπότε το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \qquad (i)$$

όπου

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7\left[(-2)(-1) - 1(-1)\right] = 21$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\left[1(-1) - 1 \cdot 2\right] = 21$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\left[1(-1) - 2(-2)\right] = 21$$

Έτσι οι (i) δίνουν
$$x_1 = \frac{21}{21} = 1, \quad x_2 = \frac{21}{21} = 1, \quad x_3 = \frac{21}{21} = 1.$$

Άσκηση 3.5 Να βρεθεί η σχέση των a, β, γ, ώστε να έχει λύση το σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + z + w &= a \\ 2x - y + z - w &= \beta \\ 7x + y + 2z - 8w &= \gamma \end{aligned}$$

Λύση

Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Για να έχει λύση το σύστημα πρέπει

$$rank(A) = rank(A|B). \qquad (i)$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι μηδέν και η 2×2 υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

Λόγω της (i) πρέπει $rank(A|B) = 2$, δηλαδή όλες οι 3×3 υποορίζουσες του επαυξημένου πρέπει να είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -1 & \beta \\ 7 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & \beta \\ 7 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\gamma - 15\beta + 9a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & \beta \\ 7 & 2 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ 7 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 5\beta - \gamma - 3a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & \beta \\ 7 & -8 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 8 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ 7 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3\gamma - \beta + 15a = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 1 & \beta \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -\gamma + 5\beta - 3a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & \beta \\ 1 & -8 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\begin{vmatrix} -1 & \beta \\ -8 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\gamma - 15\beta + 9a = 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & \beta \\ 2 & -8 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ -8 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\gamma + 10\beta - 6a = 0$$

οπότε, από όλες τις παραπάνω ορίζουσες προκύπτει η εξίσωση

$$5\beta - \gamma - 3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 5\beta - 3a$$

οπότε το σύστημα έχει λύση αν

$$\gamma = 5\beta - 3a \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 5\beta - 3a.$$

Άσκηση 3.6 Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα έχουν λύσεις.

$a)$ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$kx_1 + kx_2 + x_3 = k + 1$
$kx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$

$\beta)$ $kx_1 + x_2 - x_3 = 1$
$kx_1 + x_2 + kx_3 = k - 1$
$3x_1 + 3x_2 + kx_3 = 1$

Λύση

α) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ k+1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = -(k-2)(k-1)$$

Άρα:

▶ Για $k \neq 1$ και $k \neq 2$, ισχύει

$$rank(A) = rank(A|B) = 3,$$

οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

όπου

$$\begin{aligned} |A_1| &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+1 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}{|A|} = 0 \\ |A_2| &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k+1 & 1 \\ k & 2 & 2 \end{bmatrix} = k(2-k) \\ |A_3| &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k+1 \\ k & 2 & 2 \end{bmatrix} = k-2 \end{aligned}$$

οπότε η λύση είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{0}{-(k-2)(k-1)} = 0 \\ x_2 &= \frac{k(2-k)}{-(k-2)(k-1)} = \frac{k}{k-1} \\ x_3 &= \frac{k-2}{-(k-2)(k-1)} = \frac{1}{1-k}. \end{aligned}$$

▶ Για $k = 1$ η ορίζουσα του A είναι $|A| = 0$ και υπάρχει 3×3 ορίζουσα του επαυξημένου διάφορη του μηδενούς, η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

οπότε $rank(A) \neq rank(A|B)$
και σύμφωνα με την πρόταση 3.13 το σύστημα δεν έχει λύση.

▶ Για $k = 2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι $|A| = 0$ και όλες οι 3×3 ορίζουσες του επαυξημένου είναι μηδέν. Επιπλέον, υπάρχει μια 2×2 ορίζουσα ενός υποπίνακα του A που είναι διάφορη του μηδενός, η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 2.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.13, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βρίσκουμε από τις δυο πρώτες εξισώσεις τα x_2, x_3 συναρτήσει του x_1)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 - x_1 \\ 2x_2 + x_3 &= 3 - 2x_1 \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$x_2 = 2 - x_1$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, προκύπτει το x_3

$$x_3 = -1$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_1 = \lambda$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, 2 - \lambda, -1), \quad \lambda \in R$$

Επομένως, το σύστημα έχει λύσεις για κάθε $k \neq 1$.
β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ k & 1 & k \\ 3 & 3 & k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ k-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = -3k^2 + 3 = 3(1-k)(1+k).$$

Έτσι:

- Για $k \neq 1$ και $k \neq -1$ τότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

όπου

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k-1 & 1 & k \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 4 \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ k & k-1 & k \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - 3k^2 + 5k - 3 \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k & 1 & k-1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3k^2 + 9k - 6 = -3(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

οπότε η λύση είναι

$$x_1 = \frac{-k^2 + 3k - 4}{3(1-k)(1+k)}, \; x_2 = \frac{k^3 - 3k^2 + 5k - 3}{3(1-k)(1+k)}, \; x_3 = \frac{-3(k-1)(k-2)}{3(1-k)(1+k)} = \frac{k-2}{k+1}.$$

- Για $k = 1$, η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 0$$

όπως και όλες οι 3×3 υποορίζουσες του επαυξημένου
Επίσης, μια 2×2 υποορίζουσα του πίνακα A που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 2.$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τους δυο αγνώστους συναρτήσει του τρίτου, π.χ τους x_2, x_3 συναρτήσει του x_1 από το σύστημα της δεύτερης και τρίτης εξίσωσης

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= -x_1 \\ 3x_2 + x_3 &= 1 - 3x_1 \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις προκύπτει

$$-2x_2 = 2x_1 - 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - x_1$$

και αντικαθιστώντας το x_2 στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_1 = \lambda$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, \frac{1}{2} - \lambda, -\frac{1}{2})$$

▶ Για $k = -1$, $|A| = 0$ και όλες οι 3×3 ορίζουσες του επαυξημένου είναι διάφορες του μηδενός ($rank(A) \neq rank(A|B)$), οπότε το σύστημα δεν έχει λύση.
Τελικά, το σύστημα έχει λύσεις για $k \neq -1$.

Άσκηση 3.7 Να λυθούν τα συστήματα

$$a)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z - w &= 1 \\ 3x + 2y + z - w &= 1 \\ 2x + 3y + z + w &= 1 \\ 2x + 2y + 2z - w &= 1 \\ 5x + 5y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$\beta)\ \begin{aligned} a - 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ 2a - 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ \beta - \gamma + \delta &= 0 \\ a - \beta + 2\delta &= 0 \\ a - \gamma + 3\delta &= 0 \\ -a + \beta - 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\gamma)\ \begin{aligned} &2x - y + z - w = 1 \\ &x - z + w = 2 \\ &5x - 2y + z - w = 4 \\ &x - y + 2z - 2w = -1 \end{aligned}$$

$$\delta)\ \begin{aligned} &2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ &x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ &x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

Λύση

α) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Οι 4×4 ορίζουσες του πίνακα A και του επαυξημένου $(A|B)$ είναι μηδέν και μια 3×3 υποορίζουσα είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3.$$

Μπορούμε να βρούμε τα x, y, z συναρτήσει του w από το σύστημα της πρώτης, δεύτερης και τρίτης γραμμής (που αντιστοιχεί η παραπάνω μη μηδενική ορίζουσα)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 + w \\ 3x + 2y + z &= 1 + w \\ 2x + 3y + z &= 1 - w \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί -3 και προσθέτοντας στη δεύτερη προκύπτει

$$2y + 4z = 1 + w$$

Επιπλέον πολλαπλασιάζοντας την πρώτη επί -2 και προσθέτοντας στην τρίτη εξίσωση, προκύπτει

$$y + 5z = 1 + 3w$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 2y + 4z &= 1 + w \\ y + 5z &= 1 + 3w \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση επί -2 και προσθέτοντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$z = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}w.$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση το z έχουμε

$$y = \frac{1}{6} - \frac{7}{6}w$$

και, αντικαθιστώντας τα z και y στην (i)

$$x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}w$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $w = k$)

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{7}{6} + \frac{17}{6}k,\ \frac{1}{6} - \frac{7}{6}k,\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6}k,\ k\right).$$

β) Ο πίνακας Α του συστήματος αυτού είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 4×4 ορίζουσες του πίνακα αυτού είναι μηδέν και η 3×3 ορίζουσα που προκύπτει από τις γραμμές 2,3,4 και τις στήλες 1,2,3 είναι

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

οπότε

$$rankA = 3.$$

Έτσι, βρίσκουμε τους 3 αγνωστους, a, β, γ, συναρτήσει του δ από τις εξισώσεις 2,3,4.

$$|A'_a| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -\delta & 1 & -1 \\ -2\delta & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A'_\beta| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -\delta & -1 \\ 1 & -2\delta & 0 \end{vmatrix} = -2\delta$$

$$|A'_\gamma| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta \\ 1 & -1 & -2\delta \end{vmatrix} = -3\delta$$

οπότε

$$\begin{aligned} a &= \frac{|A'_a|}{|A'|} = 0 \\ \beta &= \frac{|A'_\beta|}{|A'|} = \frac{-2\delta}{-1} = 2\delta \\ \gamma &= \frac{|A'_\gamma|}{|A'|} = \frac{-3\delta}{-1} = 3\delta \end{aligned}$$

γ) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 4×4 και 3×3 υποορίζουσες του πίνακα Α και του επαυξημένου $(A|B)$ είναι μηδενικές. Όμως, υπάρχει 2×2 μη μηδενική υποορίζουσα του Α, η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B)$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.12 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες προκύπτουν λύνοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις ως προς x_1, x_2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -x_3 + x_4 + 1 \\ x_1 &= x_3 - x_4 + 2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το x_1 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_2 = 3x_3 - 3x_4 + 3,$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - m + 2, 3k - 3m + 3, k, m), \quad k, m \in R$$

δ) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 3×3 ορίζουσες του Α είναι μηδέν και μια 2×2 υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2 = rank(A|B)$$

(το σύστημα είναι ομογενές, οπότε έχει λύση)

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2 συναρτήσει των x_2, x_3 από το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= x_4 - x_3 \\ x_1 &= x_3 - x_4 \end{aligned}$$

αντικαθιστώντας το x_1 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_2 = 3x_3 - 3x_4$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k,\ x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - m, 3k - 3m, k, m),\ \ k, m \in R$$

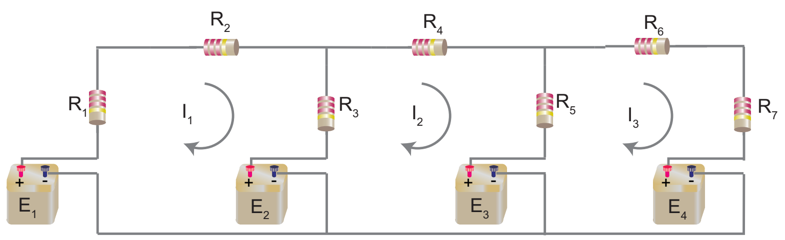
Άσκηση 3.9 Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff προκύπτει ότι για τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 των βρόγχων του κυκλώματος του σχήματος ισχύει (μέθοδος βρόγχων)

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 + E_2 \\ -E_2 - E_3 \\ E_3 - E_4 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα I_1, I_2, I_3 αν

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1K\Omega$$

και
$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 10V.$$



Λύση

Για τις τιμές αυτές από την δοσμένη σχέση προκύπτει το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα του συστήματος αυτού βρίσκεται με τον τρόπο της παρατ. 3.9 να είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

οπότε η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} &= A^{-1}\begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 100 \\ -120 \\ -40 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

οπότε οι ζητούμενες τιμές των ρευμάτων είναι

$$I_1 = 4,76mA,\ I_2 = -5,71mA,\ I_3 = -1,90mA$$

(όταν σε μια σχέση σε ένα κύκλωμα η μονάδα αντίστασης είναι $K\Omega$ και της τάσης V, τότε η μονάδα έντασης ρεύματος είναι mA).

Άσκηση 3.10 Να βρεθούν τα a, β, γ ώστε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
ax_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= 0 \\
ax_1 + 2x_2 - \gamma x_3 &= 1 \\
3x_1 - \beta x_2 + \gamma x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

να έχει τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$.
β) Να εξεταστεί αν για τις τιμές αυτές των a, β, γ το σύστημα έχει και άλλες λύσεις.

Λύση

α) Για να έχει το σύστημα τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$ πρέπει

$$
\begin{aligned}
a \cdot 1 + \beta(-1) + \gamma \cdot 1 &= 0 \\
a \cdot 1 + 2(-1) - \gamma \cdot 1 &= 1 \\
3 \cdot 1 - \beta(-1) + \gamma \cdot 1 &= 3
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
a - \beta + \gamma &= 0 \\
a - \gamma &= 3 \\
\beta + \gamma \cdot 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση προκύπτει

$$a = 3 + \gamma$$

$$\beta = -\gamma,$$

οπότε αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$3 + \gamma - (-\gamma) + \gamma = 0 \ \Leftrightarrow\ 3\gamma + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \gamma = -1.$$

Έτσι

$$a = 3 - 1 = 2$$

$$\beta = -(-1) = 1,$$

οπότε για να έχει το σύστημα τη λύση πρέπει

$$a = 2,\ \beta = 1 \text{ και } \gamma = -1.$$

β) Για τις τιμές αυτές το σύστημα γίνεται

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
3x_1 - x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος αυτού είναι (με τον τρόπο του Ορισμού 3.11)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

οπότε η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$ είναι μοναδική λύση του συστήματος αυτού.

Άσκηση 3.13 Να γραφεί το διάνυσμα

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}$$

ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\vec{a} = (1, -2, 3), \ \vec{\beta} = (3, -7, 10), \ \vec{\gamma} = (2, 1, 9).$$

Λύση

Αν
$$\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ -7y \\ 10y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z \\ z \\ 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 7y + z \\ 3x + 10y + 9z \end{bmatrix}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} \ \text{και} \ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & 1 \\ 3 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

ο πινακας του συστήματος, του οποίου ο αντίστροφος υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο

$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 73 & -7 & 17 \\ 21 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

οπότε η λύση του συστήματος αυτού είναι

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -73 & 7 & -17 \\ -21 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Άρα
$$x = 4, \quad y = -2 \ \text{και} \ z = 3,$$

οπότε

$$\vec{u} = 4\vec{a} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}.$$

Άσκηση 3.14 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο βρόγχων σε ένα κύκλωμα με αντιστάσεις

$$R_1 = 2\Omega, R_2 = 8\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = 6\Omega, R_5 = 4\Omega$$

και πηγές $E_1 = 10V$, $E_2 = -10V$ και $E_2 = 5V$, προκύπτει η εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{R}X = \mathbf{V}, \qquad (i)$$

όπου $X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας των άγνωστων ρευμάτων, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας των τάσεων των πηγών και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_5 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των αντιστάσεων του κυκλώματος.
Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3.

Λύση

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{184}\begin{bmatrix} 44 & 32 & 48 \\ 32 & 40 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix} = \frac{1}{46}\begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^{-1}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{46}\begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,96 \\ 1,20 \\ 3,04 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.15 Να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{u} = (28, -10, -3)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a} = (2, 4, 1)$, $\vec{\beta} = (-3, 5, 0)$ και $\vec{\gamma} = (5, -1, -3)$.

Λύση

Επειδή
$$det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -88 \neq 0$$

τα διανυσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε το διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους,

$$\vec{u} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}, \quad k, \lambda, \mu \in R.$$

Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ η σχέση αυτή γίνεται

$$(28, -10, -3) = k(2, 4, 1) + \lambda(-3, 5, 0) + \mu(5, -1, -3)$$

ή
$$(28, -10, -3) = (2k - 3\lambda + 5\mu, 4k + 5\lambda - \mu, k - 3\mu).$$

Η διανυσματική αυτή ισότητα ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{aligned} 2k - 3\lambda + 5\mu &= 28 \\ 4k + 5\lambda - \mu &= -10 \\ k - 3\mu &= -3, \end{aligned}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει

$$k = 3,\ \lambda = -4,\ \mu = 2.$$

Συνεπώς,

$$\vec{u} = 3\vec{a} - 4\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}.$$

Άσκηση 3.17 Σε ένα κύκλωμα με αντιστάσεις $R_1 = 2\Omega, R_2 = 8\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = 6\Omega, R_5 = 4\Omega$ και πηγές $E_1 = 40V$ και $E_2 = 20V$ από τους νόμους του Kirchoff προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} &R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) = E_1 \\ &R_2(I_2 - I_1) + R_3 I_3 + R_4(I_2 - I_3) = 0 \\ &R_4(I_3 - I_2) + R_5 I_3 = -E_2 \end{aligned}$$

για τις εντάσεις των ρευμάτων I_1, I_2, I_3 των βρόγχων του. Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3.

Λύση

Αναδιατάσσοντας τους όρους των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 &= E_1 \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_4)I_2 + (R_3 - R_4)I_3 &= 0 \\ -R_4 I_2 + (R_4 + R_5)I_3 &= -E_2 \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές των αντιστάσεων και τάσεων προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 10I_1 - 8I_2 &= 40 \\ -8I_1 + 14I_2 &= 0 \\ -6I_2 + 10I_3 &= -20 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος αυτού είναι

$$A = \begin{vmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 14 & 0 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 760,$$

οποτε η λύση του συστήματος αυτού είναι

$$I_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ I_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ I_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \qquad (i)$$

όπου

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 40 & -8 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ -20 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 5600$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 10 & 40 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 10 \end{vmatrix} = 3200$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 10 & -8 & 40 \\ -8 & 14 & 0 \\ 0 & -6 & -20 \end{vmatrix} = 400$$

οπότε οι (i) δίνουν

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{5600}{760} = 7,37\,A \\ I_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{3200}{760} = 4,21\,A \\ I_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{400}{760} = 0,53\,A \end{aligned}$$

Άσκηση 3.18 Αν υπάρχουν $a, \beta, \gamma, x, y, z \in R$, που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$x = \gamma y + \beta z, \quad y = az + \gamma x \quad \text{και} \quad z = \beta x + ay,$$

να δειχθεί ότι

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2a\beta\gamma = 1.$$

Λύση

Το ομογενές αυτό σύστημα ως προς x, y, z

$$\begin{aligned} x - \gamma y - \beta z &= 0 \\ \gamma x - y + az &= 0 \\ \beta x + ay - z &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη μηδενική λύση αν

$$|A| = 0 \tag{i}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -\gamma & -\beta \\ \gamma & -1 & a \\ \beta & a & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \gamma & a \\ \beta & -1 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ \beta & a \end{vmatrix} \\ &= 1 - a^2 + \gamma(-\gamma - a\beta) - \beta(a\gamma + \beta) \\ &= 1 - a^2 - \gamma^2 - a\beta\gamma - a\beta\gamma - \beta^2 \\ &= 1 - a^2 - \gamma^2 - \beta^2 - 2a\beta\gamma \end{aligned}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$1 - a^2 - \gamma^2 - \beta^2 - a\beta\gamma = 0 \iff a^2 + \gamma^2 + \beta^2 + 2a\beta\gamma = 1$$

Άσκηση 3.19 Να βρεθούν οι τιμές της λ για τις οποίες υπάρχει μη μηδενικός πίνακας X τέτοιος ώστε

$$AX = \lambda X \tag{i}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο X.

Λύση

Η (i) γράφεται

$$AX - \lambda X = 0 \iff (A - \lambda I)X = 0, \tag{ii}$$

όπου I ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.
Η (ii) έχει μη μηδενικές λύσεις αν η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

είναι μηδέν, δηλαδή

ή
$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad (ii)$$

Το ομογενές αυτό σύστημα έχει λύσεις εκτός της μηδενικής αν και μόνον αν

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή
$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή
$$(1-\lambda)\,[-\lambda(3-\lambda)+2] = 0$$

ή
$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

ή
$$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

ή
$$-(1-\lambda)^2(\lambda-2) = 0.$$

Επομένως

$$\lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = 2.$$

Οι αντίστοιχες της $\lambda = 1$ λύσεις είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

ή

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ -x - y &= 0 \\ 0z &= 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας του γραμμικού αυτού συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Εύκολα προκύπτει ότι ο βαθμός του πίνακα αυτού είναι 1 ($rank(A) = 1$), οπότε μπορούμε να βρούμε τον ένα άγνωστο συναρτήσει των άλλων δύο.
Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι

$$y = -x.$$

Επίσης είναι φανερό ότι και οι τρεις εξισώσεις αληθεύουν για οποιαδήποτε τιμή του z, οπότε η λύση του συστήματος είναι

$$\{(x, y, z) = (k, -k, \lambda),\ k, \lambda \in R\}.$$

Οι αντίστοιχες της $\lambda = 2$ λύσεις προκύπτουν από το σύστημα (θέτουμε $\lambda = 2$ στην (i))

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -x - 2y &= 0 \\ -z &= 0 \end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό εύκολα προκύπτει ότι

$$z = 0, \text{ και } x = 2y,$$

οπότε οι αντίστοιχες της $\lambda_2 = 2$ λύσεις είναι

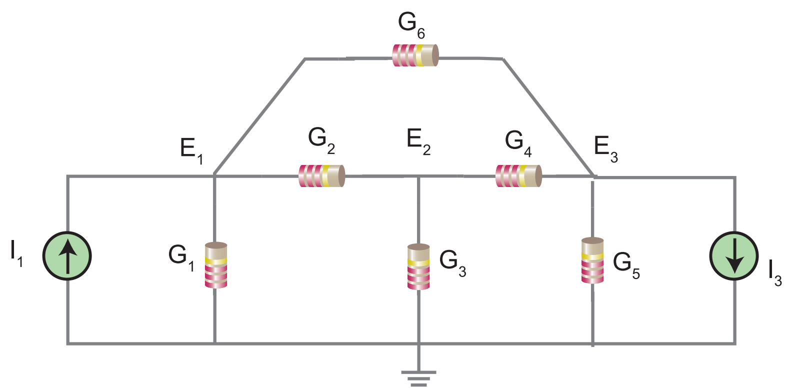
$$\{(x, y, z) = (2k, k, 0), \ k \in R\}.$$

Άσκηση 3.20 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο κόμβων προκύπτει ότι για τα δυναμικά E_1, E_2, E_3 των κόμβων του κυκλώματος του σχήματος ισχύει

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_6 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_6 & -G_4 & G_4 + G_5 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα E_1, E_2, E_3 αν

$G_1 = G_2 = G_3 = 1mS, G_4 = G_5 = G_6 = 2mS$ και $I_1 = I_2 = 2mA$.



Λύση

Για τις τιμές αυτές από τη δοσμένη σχέση προκύπτει το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα του συστήματος αυτού βρίσκεται με τον τρόπο της παρατ.3.9 να είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 14 & 8 \\ 10 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

οπότε η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 14 & 8 \\ 10 & 8 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$= \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

οπότε οι ζητούμενες τιμές των δυναμικών των κόμβων είναι

$$E_1 = \frac{20}{30} = 0,677\,V,\ E_2 = \frac{-8}{30} = -0,267\,V,\ E_3 = \frac{4}{30} = 0,133\,V.$$

(όταν σε μια σχέση σε ένα κύκλωμα η μονάδα έντασης ρεύματος είναι mA και η μονάδα αγωγιμότητας mS, τότε η μονάδα δυναμικού είναι V).

Άσκηση 3.21 Να λυθεί για κάθε $a \in R$ το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - (a+2)x_2 + (a+1)x_3 &= 0 \\ 4x_1 + (4-3a)x_2 + (3a-2)x_3 &= 0 \\ a(a+1)x_1 + a^2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Λύση

Ο πίνακας του ομογενούς αυτού συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -(a+2) & a+1 \\ 4 & 4-3a & 3a-2 \\ a(a+1) & a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το βαθμό του A υπολογίζουμε τις ορίζουσες των τεσσάρων 3×3 υποπινάκων του με το γνωστό τρόπο

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -(a+2) & a+1 \\ 4 & 4-3a & 3a-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -(a+2) & a+1 \\ a(a+1) & a^2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a^3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4-3a & 3a-2 \\ a(a+1) & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 3a^2 - 3a^3$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -2 & -(a+2) & a+1 \\ 4 & 4-3a & 3a-2 \\ a(a+1) & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -5a^2 + 5a^3$$

Παρατηρούμε ότι οι $|A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|$ γίνονται ταυτόχρονα μηδέν αν

$$a = 1 \ \text{ή}\ a = 0.$$

Επομένως:

- Για $a \in R - \{0,1\}$, τουλάχιστον μια από τις $|A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|$ δεν είναι μηδέν, οπότε
$$rank(A) = 3.$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή το ομογενές αυτό σύστημα έχει μόνον τη μηδενική λύση

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

- Για $a = 0$, ο A γίνεται

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 2×2 ορίζουσες του πίνακα αυτού είναι μηδέν, οπότε

$$rank(A) = 1,$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τον ένα άγνωστο συναρτήσει των άλλων δύο.
Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι

$$x_3 = 2x_1 + 2x_2,$$

οπότε η λύση του συστήματος για $a = 0$ είναι ($x_1 = k, x_2 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (k, m, 2k + 2m), \quad k, m \in R.$$

▸ Για $a = 1$, ο A γίνεται

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του 2×2 υποπίνακα των δύο πρώτων γραμμών και στηλών του A είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = 2.$$

Άρα, μπορούμε να βρούμε τους δύο άγνωστους x_1, x_2 συναρτήσει του x_3.
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει

$$-x_2 + x_3 = 0 \quad \text{ή} \quad x_2 = x_3$$

και από την πρώτη

$$2x_1 = -2x_2 + x_3 = -2x_3 + x_3 = -x_3 \iff x_1 = -\frac{x_3}{2}.$$

Επομένως, η λύση του συστήματος για $a = 1$ είναι ($x_3 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{k}{2}, k, k\right), \quad k \in R.$$

Άσκηση 3.22 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο βρόχων για το κύκλωμα του σχήματος με αντιστάσεις $R_1 = 2\Omega, R_2 = 8\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = 6\Omega, R_5 = 4\Omega$ και πηγές $E_1 = 40V$ και $E_2 = 20V$, προκύπτει η εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{R}X = \mathbf{V}, \qquad (i)$$

όπου

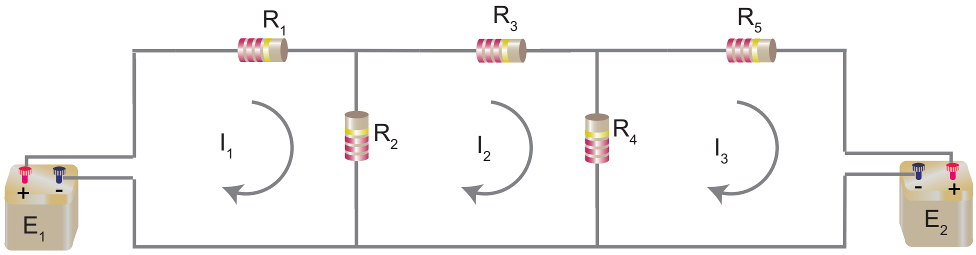
$$X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των ρευμάτων των βρόχων και των τάσεων των πηγών και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των αντιστάσεων.
Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3.

Λύση
Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων στον $\mathbf{R}$ προκύπτει



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{R}$ υπολογίζεται (με τον τρόπο της παρατ. 3.3)

$$|A| = 1000,$$

οπότε ο $\mathbf{R}$ είναι αντιστρέψιμος.
Πολλαπλασιάζοντας την (i) από αριστερά επί τον $\mathbf{R}^{-1}$ προκύπτει

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}X = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V} \Leftrightarrow X = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}. \qquad (ii)$$

Βρίσκουμε τον $\mathbf{R}^{-1}$ με τον τρόπο της παρατ. 3.9:
Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων του $\mathbf{R}$ είναι

$$|\mathbf{R}_{11}| = \begin{vmatrix} 20 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 164 \quad |\mathbf{R}_{12}| = \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = -80 \quad |\mathbf{R}_{13}| = \begin{vmatrix} -8 & 20 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 48$$

$$|\mathbf{R}_{21}| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = -80 \quad |\mathbf{R}_{22}| = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 100 \quad |\mathbf{R}_{23}| = \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -60$$

$$|\mathbf{R}_{31}| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 20 & -6 \end{vmatrix} = 48 \quad |\mathbf{R}_{32}| = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = -60 \quad |\mathbf{R}_{33}| = \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 136$$

οπότε ο συμπληρωματικός του $\mathbf{R}$ είναι

$$adj(R) = \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{21} & R_{31} \\ -R_{12} & R_{22} & -R_{32} \\ R_{13} & -R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164 & 80 & 48 \\ 80 & 100 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix}$$

οπότε ο αντίστροφος του $\mathbf{R}$ είναι ($|A| = 1000$)

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 164 & 80 & 48 \\ 80 & 100 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix}$$

Έτσι η (ii) δίνει

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 164 & 80 & 48 \\ 80 & 100 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 164 \cdot 40 + 80 \cdot 20 \\ 80 \cdot 40 + 100 \cdot 20 \\ 48 \cdot 40 + 60 \cdot 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8,16 \\ 5,2 \\ 3,12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$I_1 = 8,16\,A, \quad I_2 = 5,2\,A, \quad I_3 = 3,12\,A.$$

Άσκηση 3.23 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 &= 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Λύση

Η ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος αυτού είναι

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 3 & k \\ k & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} \\ &= 9 - k^2 - (6-k) - (2k-3) = -k^2 - k + 6 \\ &= -(k+3)(k-2) \end{aligned}$$

οπότε

$$|A| = 0 \;\Leftrightarrow\; -(k+3)(k-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -3 \text{ ή } k = 2.$$

Άρα,

- Για $k \neq -3$ και $k \neq 2$ το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \qquad (i)$$

όπου

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & k \\ 2 & k & 3 \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6 = -(k+3)(k-2) \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 - k \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} = 2 - k \end{aligned}$$

Έτσι, οι (i) δίνουν

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(k+3)(k-2)}{-(k+3)(k-2)} = 1 \\ x_2 &= \frac{2-k}{-(k+3)(k-2)} = \frac{1}{k+3} \\ x_3 &= \frac{2-k}{-(k+3)(k-2)} = \frac{1}{k+3} \end{aligned}$$

- Για $k = -3$, $|A| = 0$ και

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -(-3+3)(-3-2) \\
&= 0 \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2-(-3) = 5 \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

οπότε το σύστημα στην περίπτωση αυτή είναι αδύνατον.

- Για $k = 2$, $|A| = 0$ και

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(2+3)(2-2) \\
&= 0 \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2-2 \\
&= 0 \\
|A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

οπότε στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
Επειδή $|A| = 0$ και υπάρχει μη μηδενική 2×2 υποορίζουσα του A, (π.χ πρώτη-δεύτερη γραμμή και πρώτη-δεύτερη στήλη) η

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$rankA = rank(A|B) = 2$$

και μπορούμε να βρούμε τους αγνώστους x_1 και x_2 συναρτήσει του x_3 από το σύστημα

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 1 + x_3 \\
2x_1 + 3x_2 &= 3 - 2x_3
\end{aligned}$$

το οποίο λύνουμε με τον κανόνα Cramer

$$x_1 = \frac{|A'_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A'_2|}{|A|},$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ οπότε } \quad det(A) = 1.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
|A'_1| &= \begin{vmatrix} 1+x_3 & 1 \\ 3-2x_3 & 3 \end{vmatrix} = 3(1+x_3) - (3-2x_3) \\
&= 5x_3 \\
|A'_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 1+x_3 \\ 2 & 3-2x_3 \end{vmatrix} = 3 - 2x_3 - 2(1+x_3) \\
&= 1 - 4x_3
\end{aligned}$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή η λύση του συστήματος είναι ($x_3 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (5k, 1-4k, k), \quad k \in R.$$

Άσκηση 3.23 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 &= 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Λύση

Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6 = (2-k)(k+3)$$

- Για $k \neq 2$ και $k \neq -3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση ($rankA = rank(A|B) = 3$), την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

όπου

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & k \\ 2 & k & 3 \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6 = (2-k)(k+3) \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 - k \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} = 2 - k, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(2-k)(k+3)}{(2-k)(k+3)} = 1 \\ x_2 &= \frac{2-k}{(2-k)(3+k)} = \frac{1}{3+k} \\ x_3 &= \frac{(2-k)}{(2-k)(3+k)} = \frac{1}{3+k} \end{aligned}$$

- Για $k = 2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 0.$$

Επίσης, και όλες οι 3×3 ορίζουσες του επαυξημένου πίνακα είναι μηδέν.
Επιπλέον, υπάρχει μια 2×2 υποορίζουσα του πίνακα A η οποία είναι μη μηδενική, η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

όμοια $$rank(A|B) = 2$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
Λύνοντας το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων ως προς x_1, x_2 συναρτήσει του x_3 προκύπτει

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 3 - 2x_3 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με -2 και προσθέτοντας στη δεύτερη προκύπτει

$$x_2 = 1$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη

$$x_1 = x_3$$

οπότε, οι λύσεις της εξίσωσης (θέτοντας $x_3 = \lambda$) είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, 1, \lambda), \quad \lambda \in R$$

- Για $k = -3$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 0$$

και υπάρχει 3×3 ορίζουσα του επαυξημένου η οποία δεν είναι μηδέν, η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

οπότε το σύστημα είναι αδύνατο ($rank(A) \neq rank(A|B)$).

Άσκηση 3.24 Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (i)$$

που διέρχεται από τα σημεία $(2,0)$, $(1,1)$ και $(3,1)$.

Λύση

Επειδή ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $(2,0)$, $(1,1)$ και $(3,1)$, η (i) αληθεύει για τις συντεταγμένες τους, οπότε

$$\begin{aligned} 2A + \Gamma &= -4 \\ A + B + \Gamma &= -2 \\ 3A + B + \Gamma &= -10 \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος αυτού είναι

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσά του $$|M| = -2 \neq 0 \quad ,$$

οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$A = \frac{|M_1|}{|M|}, \quad B = \frac{|M_2|}{|M|}, \quad \Gamma = \frac{|M_3|}{|M|}, \qquad (ii)$$

όπου

$$|M_1| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad |M_2| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad |M_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -8,$$

οπότε η (ii) δίνει $$A = -4, \; B = -2 \; \text{ και } \; \Gamma = 4 \quad .$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0.$$

Ἀσκηση 3.25 Για ένα κύκλωμα που περιέχει δύο αντιστάσεις $R_1 = 10\Omega$ και $R_2 = 5\Omega$, δύο πηνία με αυτεπαγωγές $L = 2 \cdot 10^{-4} H$, πυκνωτή χωρητικότητας $C = 10^{-6} F$ και τις αρμονικές πηγές

$$v_1 = 4\cos\omega t\ (V) \ \text{ και } \ v_2 = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\ (V) \ \text{ όπου } \ \omega = 10^5 \frac{r}{s},$$

από τη μέθοδο βρόχων προκύπτει για τα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη η εξίσωση

$$\mathbf{Z}X = \mathbf{V}, \qquad (i)$$

όπου

$$X = \begin{bmatrix} \widetilde{I}_1 \\ \widetilde{I}_2 \\ \widetilde{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \widetilde{v}_1 \\ 0 \\ \widetilde{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{i\omega t} \\ 0 \\ 3e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4})} \end{bmatrix}$$

οι πίνακες των μιγαδικών ρευμάτων βρόχων και τάσεων πηγών και

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1 + iL\omega & -iL\omega & 0 \\ -iL\omega & iL\omega - \dfrac{i}{C\omega} + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + iL\omega \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των σύνθετων μιγαδικών αντιστάσεων.
Να βρεθούν τα μιγαδικά ρεύματα $\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2$ και $\widetilde{I}_3$ και στη συνέχεια ρεύματα I_1, I_2 και I_3 που διαρρέουν τους βρόγχους του κυκλώματος.

Λύση

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων στον $\mathbf{R}$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} 10 + i2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 & -i2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 & 0 \\ -i2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 & i2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 - \dfrac{i}{10^{-6} \cdot 10^5} + 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 + i2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + 20i & -20i & 0 \\ -20i & 20i - 10i + 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 + 20i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 20i & -20i & 0 \\ -20i & 5 + 10i & -5 \\ 0 & -5 & 5 + 20i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από την (i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.036 + 0.017i & 0.045 + 0.048i & 0.014 - 0.008i \\ 0.045 + 0.048i & 0.069 + 0.026i & 0.01 - 0.015i \\ 0.014 - 0.0076i & 0.01 - 0.015i & 0.009 - 0.05i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ 0 \\ 3(\cos\omega t + i\sin\omega t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,19\cos\omega t - 0,08\sin\omega t + i(0,08\cos\omega t + 0,19\sin\omega t) \\ 0,17\cos\omega t - 0,121\sin\omega t + i(0,121\cos\omega t + 0,17\sin\omega t) \\ 0,18\cos\omega t + 0,114\sin\omega t + i(-0,114\cos\omega t + 0,18\sin\omega t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε τα ρεύματα των βρόγχων είναι

$$\begin{aligned} I_1 &= Re(\widetilde{I}_1) = 0,19\cos\omega t - 0,08\sin\omega t \\ I_2 &= Re(\widetilde{I}_1) = 0,17\cos\omega t - 0,121\sin\omega t \\ I_1 &= Re(\widetilde{I}_1) = 0,18\cos\omega t + 0,114\sin\omega t \end{aligned}$$

Άσκηση 3.26 Να λυθεί για κάθε $\lambda \in R$ το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Λύση

Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του A είναι

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2-1) - (\lambda-1) + 1 - \lambda = (\lambda-1)\,[\lambda(\lambda+1)-2] \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{aligned}$$

οπότε
$$|A| = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 1 \ \text{ ή } \ \lambda = -2.$$

Επομένως:

- Για κάθε $\lambda \in R - \{-2, 1\}$, $|A| \neq 0$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \tag{1}$$

όπου (μετά από λίγες πράξεις)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{aligned}$$

- Για $\lambda = 1$, ο πίνακας του συστήματος και ο επαυξημένος του είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A|B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε (όλες οι 3×3 και 2×2 ορίζουσές τους είναι μηδέν)

$$rank A = rank(A|B) = 1.$$

Ετσι, στην περίπτωση αυτή ($\lambda = 1$) μπορούμε να βρούμε τον ένα άγνωστο, π.χ τον x_3, συναρτήσει των άλλων δύο. Από μια από τις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2,$$

οπότε η λύση του συστήματος στην περίπτωση αυτή είναι ($x_1 = k, x_2 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (k, m, 1 - k - m), \quad k, m \in R.$$

- Για $\lambda = -2$, ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

και αντικαθιστώντας την πρώτη στήλη του με τους σταθερούς όρους προκύπτει η ορίζουσα

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή ($\lambda = -2$) το σύστημα δεν έχει λύσεις.

Άσκηση 3.27 Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα έχουν άπειρες λύσεις.

$i)$ $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + (k+3)x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + (k+1)x_3 &= 0 \end{aligned}$ $\qquad$ $ii)$ $\begin{aligned} kx_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ kx_1 + x_2 + kx_3 &= k - 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + kx_3 &= 1 \end{aligned}$

Για τις τιμές αυτές να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος.

Λύση

$i)$ Σύμφωνα με την Πρόταση 3.15, για να έχει το ομογενές σύστημα αυτό άπειρες λύσεις πρέπει

$$|A| = 0,$$

όπου

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & k+3 & 6 \\ 5 & 4 & k+1 \end{vmatrix} = k^2 - 19k + 34$$

οπότε

$$|A| = 0 \;\Leftrightarrow\; k^2 - 19k + 34k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 2 \text{ ή } k = 17$$

Για $k = 2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = 3x_3 \quad \text{και} \quad x_2 = -2x_3,$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος στην περίπτωση αυτή είναι ($k = x_3$)

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3 &= (-8k, -2k, k) = k(1, -2, 1), \quad k \in R \\ &= span(1, -2, 1) \end{aligned}$$

Για $k = 17$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 20x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 18x_3 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = -8x_2 \quad \text{και} \quad x_3 = 2x_2$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος στην περίπτωση αυτή είναι ($k = x_2$)

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3 &= (-8k, k, 2k) = k(-8, 1, 2), \quad k \in R \\ &= span(-8, 1, 2)\end{aligned}$$

ii) Σύμφωνα με την Πρόταση 3.14, για να έχει το σύστημα άπειρες λύσεις πρέπει

$$|A| = 0 \ \text{ και } \ (|A_1| = 0, \ |A_2| = 0 \ \text{ και } \ |A_3| = 0)$$

οπότε

$$|A| = 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ k & 1 & k \\ 3 & 3 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k\begin{vmatrix} 1 & k \\ 3 & k \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} k & k \\ 3 & k \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3 - 3k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ 3(1-k)(1+k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1 \ \text{ ή } \ k = -1$$

▸ Για $k = 1$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.14 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις για $k = 1$.

▸ Για $k = -1$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.14 το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $k = 1$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 \quad \text{και} \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

Άρα το σύστημα για $k = 1$ έχει λύσεις ($x_2 = l$)

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2} - l, l, -\frac{1}{2}\right), \quad l \in R.$$

Άσκηση 3.28 Αν

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

α) Να δειχθεί ότι

$$(A - aI_3)^3 = \mathbf{0}, \quad \text{για κάθε } a \in R,$$

όπου I_3 ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

β) Αν $a \neq 0$, να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1}.

Λύση

α)
$$B = A - aI_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$B^3 = B^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

β) Ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1, η ορίζουσά του είναι το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Άρα, αν $a \neq 0$, $|A| \neq 0$, οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A). \tag{i}$$

Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων του A είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \qquad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

οπότε ο συμπληρωματικός του A είναι

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{a^3}\begin{bmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.29 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \tag{i}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας στη δεύτερη, η (i) γίνεται

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \tag{ii}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας στην τρίτη η (ii) γίνεται

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \qquad (iii)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας στην τέταρτη η (iii) γίνεται

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή είναι άνω τριγωνική, είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της (Πρόταση 3.1), οπότε η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$1(-x)^3 = 0 \iff x = 0.$$

Άσκηση 3.30 Να βρεθεί ο πίνακας X αν

$$A^{-1}XA = B, \qquad (i)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (i) επί A^{-1} από δεξιά και επί A από αριστερά προκύπτει (λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, (3.11))

$$\begin{aligned} A\left(A^{-1}XA\right)A^{-1} = ABA^{-1} &\iff \left(AA^{-1}\right)X\left(AA^{-1}\right) = ABA^{-1} \\ &\iff IXI = ABA^{-1} \end{aligned}$$

οπότε

$$X = ABA^{-1}. \qquad (i)$$

Στο Παράδειγμα 3.48 δείξαμε ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned} X &= ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 7 & 7 \\ -56 & 9 & 10 \\ -167 & 30 & 29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.31 Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα

$$a)\ \begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{aligned} \qquad \beta)\ \begin{aligned} x_1 + kx_2 + 2x_3 &= 0 \\ kx_1 - 3x_2 + (k+1)x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \gamma)\ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Λύση

α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Αντιμεταθέτοντας την τρίτη γραμμή με την πρώτη προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ \lambda & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης είναι 1, οπότε στη συνέχεια μηδενίζουμε τα άλλα στοιχεία της πρώτης στήλης. Για το μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της δεύτερης γραμμής προσθέτουμε στη δεύτερη γραμμή την πρώτη επί -1, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \vdots & 0 \\ \lambda & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της τρίτης γραμμής, προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή την πρώτη επί $-\lambda$, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \vdots & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

- Για $1-\lambda \neq 0 \iff \lambda \neq 1$, διαιρώντας τη δεύτερη γραμμή δια $\lambda - 1$, προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \vdots & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της πρώτης γραμμής, προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή τη δεύτερη επί -1, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \vdots & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της τρίτης γραμμής, προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή τη δεύτερη επί $\lambda - 1$, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Επομένως ($1-\lambda \neq 0$), η τελευταία γραμμή του πίνακα είναι

$$0 \quad 0 \quad \vdots \quad 1-\lambda,$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.14, το σύστημα είναι αδύνατο.

- Για $1-\lambda = 0 \iff \lambda = 1$, το αρχικό σύστημα είναι

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$x_1 + x_2 = 1 \iff x_2 = 1 - x_1$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή η λύση του συστήματος είναι

$$(x_1, x_2) = (k, 1-k), \quad k \in R.$$

β) Η ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k & -3 & k+1 \\ -1 & 2 & k \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & k+1 \\ 2 & k \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} k & k+1 \\ -1 & k \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} k & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3k - 2(k+1) - k(k^2+k+1) + 2(2k-3) = -k^3 - k^2 - 2k - 8\end{aligned}$$

οπότε

$$|A| = 0 \Leftrightarrow -k^3 - k^2 - 2k - 8 = 0.$$

Παραγοντοποιώντας την πολυωνυμική αυτή εξίσωση με το γνωστό τρόπο (σχήμα Horner) προκύπτει (έχει ρίζα το -2)

$$|A| = 0 \Leftrightarrow (k+2)(-k^2+k-4) = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

(διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι αρνητική).
Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.15:

- Για $k \neq -2$, η μοναδική λύση του ομογενούς αυτού συστήματος είναι η μηδενική $(0,0,0)$.
- Για $k = -2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ας λύσουμε το σύστημα αυτό με τη μέθοδο Gauss.
Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ -2 & -3 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & 2 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης είναι μονάδα.
Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της δεύτερης γραμμής, προσθέτουμε σε αυτήν την πρώτη γραμμή επί 2, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -7 & 3 & \vdots & 0 \\ -1 & 2 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της τρίτης γραμμής, προσθέτουμε σε αυτήν την πρώτη γραμμή, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -7 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Αγνοώντας την πρώτη γραμμή, το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο είναι το -7 στη δεύτερη γραμμή και δεύτερη στήλη. Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τη δεύτερη γραμμή επί $\frac{1}{-7}$, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της πρώτης γραμμής προσθέτουμε σε αυτήν τη δεύτερη γραμμή επί 2, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι ανηγμένος κλιμακωτός και αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + \frac{8}{7}x_3 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 - \frac{3}{7}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου η λύση προφανώς είναι

$$x_1 = -\frac{8}{7}x_3 \ \text{ και } \ x_2 = \frac{3}{7}x_3$$

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι ($x_3 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{8}{7}k, \frac{3}{7}k, k\right), \quad k \in R.$$

γ) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & \vdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης είναι μονάδα. Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της δεύτερης γραμμής, προσθέτουμε στη δεύτερη γραμμή την πρώτη επί -1, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \vdots & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & \vdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Για τον μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της τρίτης γραμμής, προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή την πρώτη επί -1, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \vdots & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

Αγνοώντας την πρώτη γραμμή, το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο είναι το -2 στη δεύτερη γραμμή και τέταρτη στήλη.
Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τη δεύτερη γραμμή επί $-\frac{1}{2}$, οπότε προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \vdots & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια μηδενίζουμε τα άλλα στοιχεία της τρίτης στήλης.
Για το μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της πρώτης γραμμής, προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή τη δεύτερη επί -1, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \vdots & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

Για το μηδενισμό του αντίστοιχου στοιχείου της τρίτης γραμμής, προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή τη δεύτερη επί -4, οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.14, το σύστημα είναι αδύνατο αν $\lambda \neq 5$.
Για $\lambda = 5$ από τον τελευταίο πίνακα, που είναι ανηγμένος κλιμακωτός, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

οπότε $$x_1 = 2x_2 - x_3 + 1 \quad \text{και} \quad x_4 = 1.$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι ($x_2 = k, x_3 = \lambda$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2k - \lambda + 1, k, \lambda, 1), \quad k, \lambda \in R.$$

Άσκηση 3.34 Αν το σύστημα

$$\begin{aligned} kx_1 + (2\lambda - 1)x_2 &= \lambda - k \\ (k+1)x_1 + \lambda x_2 &= 2\lambda \end{aligned}$$

έχει τη λύση $x_1 = 1, \ x_2 = -2$

να βρεθούν όλες οι λύσεις του.

Λύση

Επειδή το σύστημα έχει τη λύση $x_1 = 1, \ x_2 = -2$

$$\begin{aligned} k \cdot 1 + (2\lambda - 1)(-2) = \lambda - k \\ (k+1) \cdot 1 + \lambda(-2) = 2\lambda \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} 2k - 5\lambda = -2 \\ k - 4\lambda = -1 \end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$k = -1, \ \lambda = 0,$$

οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό δίνει $x_1 = -x_2 - 1$

οπότε οι λύσεις του είναι ($x_2 = m$)

$$(x_1, x_2) = (-m - 1, m), \ m \in R.$$

Άσκηση 3.36 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο βρόχων για το κύκλωμα του Σχήματος 3.26, προκύπτει η εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{R}X = \mathbf{V}, \qquad (i)$$

όπου

$$X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

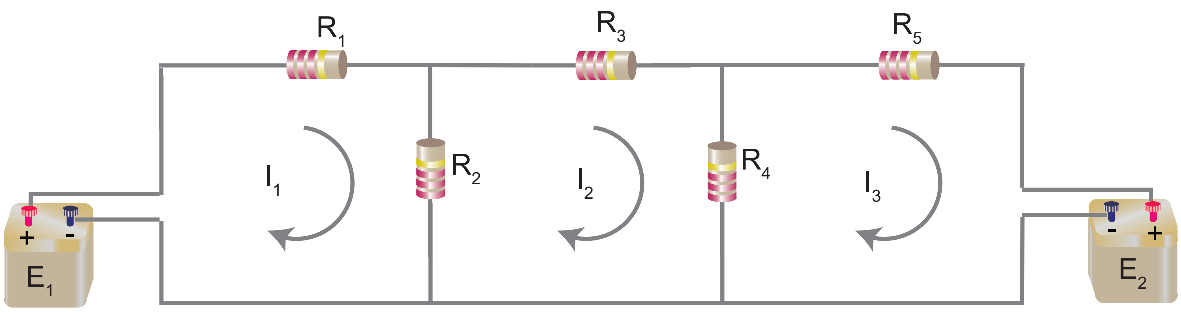
ο πίνακας των ρευμάτων των βρόχων και των τάσεων των πηγών και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των αντιστάσεων.

Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3 αν:

$R_1 = 2\Omega, R_2 = 8\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = 6\Omega, R_5 = 4\Omega, \ E_1 = 40V$ και $E_2 = 20V$



Σχήμα 3.26 *Κύκλωμα συνεχούς ρεύματος*

Λύση

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων στον πίνακα R προκύπτει

$$R = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Όμοια, αντικαθιστώντας τις τιμές των τάσεων των πηγών στον πίνακα V προκύπτει

$$V = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα R είναι

$$|R| = 800$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει λύση την

$$I_1 = \frac{|R_1|}{|R|},\ I_2 = \frac{|R_2|}{|R|},\ I_3 = \frac{|R_3|}{|R|}$$

όπου

$$|R_1| = \begin{vmatrix} 40 & -8 & 0 \\ 20 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 7360$$

$$|R_2| = \begin{vmatrix} 10 & 40 & 0 \\ -8 & 40 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5200$$

και

$$|R_3| = \begin{vmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 3120$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι

$$I_1 = \frac{|R_1|}{|R|} = \frac{7360}{800} = 9,2A$$

$$I_2 = \frac{|R_2|}{|R|} = \frac{5200}{800} = 6,5A$$

και

$$I_3 = \frac{|R_3|}{|R|} = \frac{3120}{800} = 3,9A$$

Άσκηση 3.38 Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα προέκυψαν οι παρακάτω εξισώσεις για τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 των κλάδων του

$$\begin{aligned} 12I_1 - 6I_2 - 4I_3 &= -12 \\ -6I_1 + 18I_2 - 8I_3 &= 24 \\ -4I_1 - 8I_2 + 24I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Να υπολογιστούν οι τιμές των I_1, I_2, I_3.

Λύση

Το σύστημα γράφεται ως

$$AX = B,$$

όπου
$$A=\begin{bmatrix}12 & -6 & -4\\ -6 & 18 & -8\\ -4 & -8 & 24\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{bmatrix}\quad \text{και}\quad B=\begin{bmatrix}-12\\ 24\\ 0\end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A, προκύπτει
$$|A|=2880,$$
οπότε
$$rank(A)=3$$
Επίσης, η ορίζουσα του A είναι μία 3×3 υποορίζουσα του επαυξημένου $A|B$, οπότε
$$rank(A|B)=3$$
Δηλαδή,
$$rank(A)=rank(A|B)$$
Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.14 το σύστημα έχει μοναδική λύση την
$$I_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad I_2=\frac{|A_2|}{|A|},\quad I_3=\frac{|A_3|}{|A|}\qquad (i)$$
όπου
$$|A_1|=\begin{vmatrix}-12 & -6 & -4\\ 24 & 18 & -8\\ 0 & -8 & 24\end{vmatrix}=-192\quad |A_2|=\begin{vmatrix}12 & -12 & -4\\ -6 & 24 & -8\\ -4 & 0 & 24\end{vmatrix}=4416$$
και
$$|A_3|=\begin{vmatrix}12 & -6 & -12\\ -6 & 18 & 24\\ -4 & -8 & 0\end{vmatrix}=1440$$
οπότε οι (i) δίνουν
$$I_1=\frac{-192}{2880}=-0,067mA,\quad I_2=\frac{4416}{2880}=1,53mA,\quad I_3=\frac{1440}{2880}=0,5\,mA.$$

Κεφάλαιο 4

Διανύσματα

Άσκηση 4.1 Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων
$$\vec{a} = (1, 0, 1) \text{ και } \vec{\beta} = (0, 1, -1).$$

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.11,
$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}||\vec{\beta}|}. \qquad (i)$$

Σύμφωνα με την πρότ. 4.1,
$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1(-1) = -1.$$

Λόγω της (4.7),
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

οπότε η (i) δίνει
$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως
$$(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Άσκηση 4.2 Να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ αν
$$\begin{aligned} 3(\vec{x} - \vec{a}) + 2(\vec{y} - \vec{\beta}) &= \vec{\gamma} \qquad (i) \\ 2(\vec{x} + \vec{a}) - (\vec{y} + \vec{\beta}) &= \vec{\delta}. \qquad (ii) \end{aligned}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την (ii) επί δύο και προσθέτοντας κατά μέλη με την (i), προκύπτει
$$3\vec{x} - 3\vec{a} + 2\vec{y} - 2\vec{\beta} + 4\vec{x} + 4\vec{a} - 2\vec{y} - 2\vec{\beta} = \vec{\gamma} + 2\vec{\delta},$$

ή
$$7\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta},$$

οπότε
$$\vec{x} = \frac{1}{7}\left(-\vec{a} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta}\right) = -\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{\beta} + \frac{1}{7}\vec{\gamma} + \frac{2}{7}\vec{\delta}.$$

Έτσι η (ii) δίνει
$$\begin{aligned} \vec{y} &= 2\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\delta} \\ &= 2\left(-\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{\beta} + \frac{1}{7}\vec{\gamma} + \frac{2}{7}\vec{\delta}\right) + 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\delta} \end{aligned}$$

ή $$\vec{y} = \frac{12}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{\beta} + \frac{2}{7}\vec{\gamma} - \frac{3}{7}\vec{\delta}.$$

Άσκηση 4.4 Να δειχθεί ότι αν K είναι το μέσον της διαγωνίου ΑΓ οποιουδήποτε τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τότε
$$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}. \qquad (i)$$

Λύση

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της (i) ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων θέσης, ως προς ένα σημείο αναφοράς O, των κορυφών A, B, Γ, Δ.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Delta} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OK} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} - 2\overrightarrow{OK} \end{aligned} \qquad (ii)$$

Επειδή το K είναι μέσον της ΑΓ,
$$2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}.$$

Ετσι, η (ii) γίνεται
$$\begin{aligned} \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Delta} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}) \\ &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.7 Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ του χώρου
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A}| \qquad (i)$$

Λύση

- Αν τα A, B, Γ είναι συνευθειακά,

$$\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{B\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{B\Gamma} \| \overrightarrow{\Gamma A},$$

οπότε
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A} = 0\ .$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή η (i) ισχύει.

- Αν τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, τότε

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma}| &= |-\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = 2E, \\ |\overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A}| &= |-\overrightarrow{\Gamma B} \times \overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{\Gamma B} \times \overrightarrow{\Gamma A}| = 2E, \end{aligned}$$

όπου E το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (βλ. Παράδειγμα 4.12).
Επομένως, σε κάθε περίπτωση,
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A}|.$$

Άσκηση 4.10 Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων
$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta},$$
αν $$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{\beta}| = 5 \ \text{ και } \ (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.11,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}. \qquad (i)$$

Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{\beta}) \\ &= 6|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2|\vec{\beta}|^2 \qquad (ii) \\ &= 6|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 - 7\vec{a} \cdot \vec{\beta} \end{aligned}$$

Από τον ορισμό 4.11,

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}||\vec{\beta}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

Ετσι, η (ii) δίνει

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 5^2 - 7(-5) = 109. \qquad (iii)$$

Επίσης

$$|\vec{u}| = |2\vec{a} - \vec{\beta}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{\beta})^2}$$

και από την (4.13)

$$(2\vec{a} - \vec{\beta})^2 = |2\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 4 \cdot 2^2 + 5^2 - 4(-5) = 61,$$

οπότε

$$|\vec{u}| = \sqrt{61}. \qquad (iv)$$

Όμοια προκύπτει ότι

$$|\vec{v}| = \sqrt{196} = 14. \qquad (v)$$

Η (i) με τη βοήθεια των (iii)-(v) δίνει

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{109}{14\sqrt{61}} = 0,997,$$

οπότε

$$\theta = \cos^{-1} 0,997 = 4,54^0.$$

Άσκηση 4.11 Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι κορυφές παραλληλογράμμου και

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{\beta} = \overrightarrow{A\Delta},\ \vec{\gamma} = \overrightarrow{A\Gamma},\ \vec{\delta} = \overrightarrow{\Delta B},$$

τότε να δειχθεί ότι:

$$|\vec{\gamma}|^2 + |\vec{\delta}|^2 = 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2\right) \qquad (i)$$

$$|\vec{\gamma}|^2 - |\vec{\delta}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{\beta}. \qquad (ii)$$

Λύση

$$\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} \ \text{ ή } \ \vec{\delta} = \vec{a} - \vec{\beta}.$$

Επίσης, επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο,

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} \ \text{ ή } \ \vec{\gamma} = \vec{a} + \vec{\beta}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} |\vec{\delta}|^2 &= (\vec{a} - \vec{\beta})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} \\ |\vec{\gamma}|^2 &= (\vec{a} + \vec{\beta})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta}, \end{aligned}$$

οπότε προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}|^2 + |\vec{\delta}|^2 &= 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2\right) \\ |\vec{\gamma}|^2 - |\vec{\delta}|^2 &= 4\vec{a} \cdot \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.13 Δίνονται τα σημεία $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων P της ευθείας AB για τα οποία

$$\frac{(AP)}{(PB)} = k, \; k > 0.$$

Λύση

Σύμφωνα με τις ασκ. 4.50 και 4.51, υπάρχουν δύο τέτοια σημεία P_1 και P_2 με διανύσματα θέσης, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}_1 &= \frac{\vec{a} + k\vec{\beta}}{1+k} = \left(\frac{a_1 + k\beta_1}{1+k}, \frac{a_2 + k\beta_2}{1+k}, \frac{a_3 + k\beta_3}{1+k}\right), \\ \overrightarrow{OP}_2 &= \frac{\vec{a} - k\vec{\beta}}{1-k} = \left(\frac{a_1 - k\beta_1}{1-k}, \frac{a_2 - k\beta_2}{1-k}, \frac{a_3 - k\beta_3}{1-k}\right), \end{aligned}$$

όπου $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τα διανύσματα θέσης των A, B, ως προς το O. Το P_1 είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB, ενώ το P_2 σημείο της προέκτασής του.
Επομένως, οι συντεταγμένες των ζητούμενων σημείων είναι

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{a_1 + k\beta_1}{1+k}, \frac{a_2 + k\beta_2}{1+k}, \frac{a_3 + k\beta_3}{1+k}\right), \\ P_2 &= \left(\frac{a_1 - k\beta_1}{1-k}, \frac{a_2 - k\beta_2}{1-k}, \frac{a_3 - k\beta_3}{1-k}\right). \end{aligned}$$

Άσκηση 4.15 Να δειχτεί ότι οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου G του τριγώνου ΑΒΓ, όπου $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ και $\Gamma\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ είναι

$$x_1 = \frac{a_1 + \beta_1 + \gamma_1}{3}, \quad x_2 = \frac{a_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3}, \quad x_3 = \frac{a_3 + \beta_3 + \gamma_3}{3}.$$

Λύση

Το διάνυσμα θέσης του βαρύκεντρου G ενός τριγώνου ΑΒΓ, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O, είναι (βλ. λύση άσκ. 4.26)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right). \tag{i}$$

Τα διανύσματα θέσης, ως προς το O, των σημείων A, B και Γ είναι

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3), \; \overrightarrow{OB} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \; \overrightarrow{O\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε,

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{3}(a_1 + \beta_1 + \gamma_1), \frac{1}{3}(a_2 + \beta_2 + \gamma_2), \frac{1}{3}(a_3 + \beta_3 + \gamma_3)\right).$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου είναι

$$x_1 = \frac{a_1 + \beta_1 + \gamma_1}{3}, \quad x_2 = \frac{a_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3}, \quad x_3 = \frac{a_3 + \beta_3 + \gamma_3}{3}.$$

Άσκηση 4.22 α) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα

$$\vec{\delta} = |\vec{a}|\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\vec{a}$$

διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.
β) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $-\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

Λύση

α) Το συνημίτονο των γωνιών θ και φ που σχηματίζει το $\vec{\delta}$ με τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{a}||\vec{\delta}|} = \frac{\vec{a}\cdot(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a})}{|\vec{a}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}||\vec{a}|^2}{|\vec{a}||\vec{\delta}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}||\vec{a}|}{|\vec{\delta}|} \\ \cos\theta &= \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{\vec{\beta}\cdot(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a})}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{\beta}|^2+|\vec{\beta}|\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{\beta}|+\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\delta}|}\end{aligned} \qquad (i)$$

Από τις (i) είναι φανερό ότι

$$\cos\varphi = \cos\theta \iff \varphi = \theta,$$

οπότε το διάνυσμα $\vec{\delta}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.
β) Η γωνία των $-\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, οπότε η διχοτόμος της πρώτης είναι κάθετη στην διχοτόμο της δεύτερης.

Αν $\vec{\delta}' = |\vec{\beta}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{\beta}$,

$$\begin{aligned}\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}' &= \left(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a}\right)\cdot\left(|\vec{\beta}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{\beta}\right) \\ \text{Αν} \quad &= \left(|\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\right)(\vec{\beta}\cdot\vec{a}) - |\vec{a}|^2\,|\vec{\beta}|^2 + |\vec{\beta}|^2\,|\vec{a}|^2 - |\vec{\beta}|\,|\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{\beta}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{\delta}$ είναι το $\vec{\delta}'$.
Επομένως, ένα διάνυσμα παράλληλο με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $-\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι το

$$\vec{\delta}' = |\vec{\beta}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{\beta}.$$

Άσκηση 4.24 Να βρεθεί το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει των διανυσμάτων θέσης των Β, Γ, Δ ως προς την κορυφή του Α.

Λύση
Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$, δηλαδή (βλ. παράδ. 4.12α)

$$\begin{aligned}(AB\Gamma\Delta) &= (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) \\ &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{A\Delta}\times\overrightarrow{A\Gamma}|\end{aligned}$$

Άσκηση 4.25 Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E = |\vec{a}\times\vec{\beta} + \vec{\beta}\times\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\times\vec{a}|,$$

όπου $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσης των Α, Β, Γ, ως προς ένα σημείο Ο.

Λύση
Σύμφωνα με το παράδ. 4.12β, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E = (AB\Gamma\Delta) = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}|.$$

Εκφράζοντας τα διανύσματα των πλευρών $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ των άκρων τους ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{a} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma} - \vec{a} \qquad (i)$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned}E &= |(\vec{\beta}-\vec{a})\times(\vec{\gamma}-\vec{a})| \\ &= |\vec{\beta}\times\vec{\gamma} - \vec{\beta}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{\gamma} + \vec{a}\times\vec{a}|.\end{aligned}$$

Επειδή

$$-\vec{\beta}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{\beta}, \quad -\vec{a}\times\vec{\gamma} = \vec{\gamma}\times\vec{a} \quad \text{και} \quad \vec{a}\times\vec{a} = 0,$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E = |\vec{a} \times \vec{\beta} + \vec{\beta} \times \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \times \vec{a}|.$$

Άσκηση 4.26 Αν G είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και O οποιοδήποτε σημείο, τότε να δειχθεί ότι

α)
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right).$$

β)
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}.$$

Λύση

(α) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου απέχει τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της κάθε διαμέσου από την αντίστοιχη κορυφή, οπότε αν M είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}. \qquad (i)$$

Επίσης,

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)$$

ή

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}. \qquad (ii)$$

Το διάνυσμα θέσης του μέσου της ΒΓ είναι

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right). \qquad (iii)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις εύκολα προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right).$$

(β)
$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}, \quad \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OG},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OG} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} - 3\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

Επομένως, λόγω και του (α)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} - 3\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right) \\ &= \vec{0}\end{aligned}.$$

Άσκηση 4.27 Αν τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία διανύσματα κάθετα μεταξύ τους ανά δύο ($\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $\vec{a} \perp \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$), και

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{\beta} + u_3\vec{\gamma}, \; \vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{\beta} + v_3\vec{\gamma}, \; u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in R,$$

τότε να δειχθεί ότι

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Λύση

Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1\vec{a}+u_2\vec{\beta}+u_3\vec{\gamma})\cdot(v_1\vec{a}+v_2\vec{\beta}+v_3\vec{\gamma})\\ &= u_1v_1\vec{a}\cdot\vec{a}+u_1v_2\vec{a}\cdot\vec{\beta}+u_1v_3\vec{a}\cdot\vec{\gamma}+u_2v_1\vec{\beta}\cdot\vec{a}\\ &+ u_2v_2\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}+u_2v_3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+u_3v_1\vec{\gamma}\cdot\vec{a}+u_3v_2\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}+u_3v_3\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

Επειδή $\vec{a}\perp\vec{\beta}$, $\vec{a}\perp\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{a}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0.$$

Ενώ επειδή τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία διανύσματα,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}=1.$$

Επομένως,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Άσκηση 4.29 Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ ισχύει:

α) $\dfrac{|\vec{x}+\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|+k}\leq 1, \qquad k>0.$

β) $|\vec{x}+\vec{y}|+|\vec{x}-\vec{y}|\leq 2(|\vec{x}|+|\vec{y}|).$

Λύση

α) Για $k>0$, ισχύει

$$|\vec{x}|+|\vec{y}|+k\geq|\vec{x}|+|\vec{y}|$$

οπότε

$$\frac{|\vec{x}+\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|+k}\leq\frac{|\vec{x}+\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|}$$

Επίσης,

$$|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|,$$

οπότε

$$\frac{|\vec{x}+\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|+k}\leq\frac{|\vec{x}+\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|}\leq\frac{|\vec{x}|+|\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|}$$

ή

$$\frac{|\vec{x}+\vec{y}|}{|\vec{x}|+|\vec{y}|+k}\leq 1$$

β)

$$|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|, \tag{i}$$

$$|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}+(-\vec{y})|\leq|\vec{x}|+|-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|. \tag{ii}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισώσεις (i),(ii) προκύπτει

$$|\vec{x}+\vec{y}|+|\vec{x}-\vec{y}|\leq 2(|\vec{x}|+|\vec{y}|).$$

Άσκηση 4.30 Στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Μ τέτοιο ώστε $(\Gamma M)=3(BM)$ ενώ στην προέκτασή της ένα σημείο Κ, τέτοιο ώστε $(\Gamma K)=2(BK)$. Να εκφραστούν τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AK}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ και $\vec{v}=\overrightarrow{A\Gamma}$.

Λύση

Επειδή το Μ είναι το σημείο της ΒΓ για το οποίο $(\Gamma M)=3(BM)$,

$$\overrightarrow{\Gamma M}=3\overrightarrow{MB}.$$

Εκφράζοντας τα διανύσματα της σχέσης αυτής ως διαφορές των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους ως προς την κορυφή Α προκύπτει (βλ. λύση Άσκησης 4.50)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{\overrightarrow{A\Gamma}+3\overrightarrow{AB}}{1+3} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}\\ &= \frac{3}{4}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}\end{aligned}$$

Επειδή το Κ είναι το σημείο προέκτασης της ΓΒ για το οποίο $(\Gamma K) = 2(BK)$,

$$\overrightarrow{\Gamma K} = -2\overrightarrow{KB}$$

Εκφράζοντας τα διανύσματα της σχέσης αυτής ως διαφορές των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους ως προς την κορυφή Α παίρνουμε (βλ. λύση Άσκησης 4.51)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}}{1-2} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma} = 2\vec{u}-\vec{v}.$$

Άσκηση 4.31 Για τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β, Γ, ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο, ισχύει

$$7\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}. \qquad (i)$$

Να δειχθεί ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Θα δείξουμε ότι

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{A\Gamma}, \quad m \in R,$$

εκφράζοντας τα διανύσματα της (i) ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους ως προς το σημείο Α.

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO},$$

οπότε η (i) γίνεται

$$7(-\overrightarrow{AO})-4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})-3(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO}) = \vec{0}$$

ή

$$-4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

ή

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Άρα τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4.32 Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, Κ το σημείο της πλευράς ΔΓ, για το οποίο

$$(\Delta K) = 2(K\Gamma)$$

και Ν το σημείο της διαγωνίου $A\Gamma$ για το οποίο

$$(AN) = 3(N\Gamma).$$

Να εκφραστούν τα διανύσματα

$$\overrightarrow{AK},\ \overrightarrow{BK},\ \overrightarrow{OK},\ \overrightarrow{\Delta N} \text{ και } \overrightarrow{NK}$$

ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{A\Delta}$.

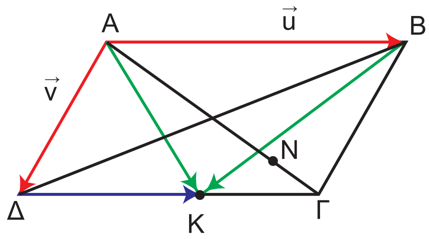
Λύση

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta K} \qquad (i)$$

Επειδή $(\Delta K) = 2(K\Gamma)$,

$$(\Delta K) = \frac{2}{3}(\Gamma\Delta),$$

οπότε



Σχήμα 4.32 *Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.*

$$\overrightarrow{\Delta K} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \qquad (ii)$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} = \vec{u},$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\overrightarrow{\Delta K} = \frac{2}{3}\vec{u},$$

και η (i)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}. \qquad (iii)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\\ &= -\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}\\ &= -\frac{1}{3}\vec{u} + \vec{v}\end{aligned}$$

Επίσης

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} \qquad (iv)$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, το Ο είναι το μέσον της ΑΓ, οπότε

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Gamma A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}. \qquad (v)$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο,

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \vec{u} + \vec{v},$$

οπότε η (v) δίνει

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})\\ &= -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

και η (iv), λόγω και της (iii),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}\\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\vec{u} + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\vec{v}\\ &= -\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

Ισχύει

$$\overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma N} \qquad (vi)$$

Επίσης,

$$(\Gamma N) = \frac{1}{4}(A\Gamma)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{u} + \vec{v},$$

οπότε

$$\overrightarrow{\Gamma N} = -\overrightarrow{N\Gamma} = -\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}),$$

Άρα, η (vi) δίνει

$$\overrightarrow{\Delta N} = \vec{u} - \frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{3}{4}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v}.$$

Ισχύει

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{N\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma K} \tag{vii}$$

Επίσης,

$$(N\Gamma) = \frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v})$$

και

$$\overrightarrow{\Gamma K} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\frac{1}{3}\vec{u},$$

οπότε η (vii) δίνει

$$\overrightarrow{NK} = \frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}) - \frac{1}{3}\vec{u} = -\frac{1}{12}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}.$$

Άσκηση 4.33 Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, τότε

$$k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow k = \lambda = 0.$$

Λύση

Υποθέτουμε ότι $k \neq 0$. Τότε

$$k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{k}\vec{\beta}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, πράγμα που είναι άτοπο, αφού τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα. Επομένως,

$$k = \lambda = 0.$$

Άσκηση 4.34 Αν τα διανύσματα θέσης, ως προς ένα σημείο αναφοράς O, των σημείων A, B, Γ, Δ είναι

$$\vec{a},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = -2\vec{a} + 3\vec{\beta},$$

τότε να δειχθεί ότι τα A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

Λύση

Για να δείξουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε διαδοχικά ότι:

- Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
- Τα Α, Β, Δ είναι συνευθειακά.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{\beta} - \vec{a}$$

και

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Gamma} &= \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA}\\ &= \vec{\gamma} - \vec{a}\\ &= 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{a}\\ &= \vec{a} - \vec{\beta}\\ &= \overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Επίσης,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Delta} &= \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} = \vec{\delta} - \vec{a}\\ &= -2\vec{a} + 3\vec{\beta} - \vec{a}\\ &= 3(\vec{\beta} - \vec{a})\\ &= 3\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Α, Β, Δ είναι συνευθειακά. Επομένως, τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4.35 Να δειχθεί ότι αν υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu \in I\!R$, με $|k| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$, τέτοιοι ώστε

$$k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}, \quad k + \lambda + \mu = 0, \tag{i}$$

τότε τα σημεία Α, Β, Γ με διανύσματα θέσης $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο, είναι συνευθειακά.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{A\Gamma}, \quad m \in R.$$

Την σχέση αυτή δείχνουμε εκφράζοντας τα διανύσματα της (i) ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους με σημείο αναφοράς το σημείο Α.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}, \quad \vec{\beta} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}, \quad \vec{\gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO},$$

οπότε

$$k(-\overrightarrow{AO}) + \lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + \mu(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0}$$

ή

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} - (k + \lambda + \mu)\overrightarrow{AO} = \vec{0}.$$

Άρα, λόγω και του ότι $k + \lambda + \mu = 0$,

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \ \text{ με } \ \mu \neq 0 \text{ ή } \lambda \neq 0,$$

Επομένως $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4.36 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}, \vec{u}$:
α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\vec{x} \times \vec{v} = \vec{u} \tag{i}$$

έχει λύση ως προς $\vec{x}$ αν και μόνον αν τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα.
β) Να βρεθεί συναρτήσει των $\vec{u}, \vec{v}$ η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Λύση

α) Αν η εξίσωση έχει λύση τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{a}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{u},$$

οπότε

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

Αντίστροφα, στην περίπτωση που τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους θα δείξουμε ότι υπάρχει λύση της (i) της μορφής

$$\vec{x}_0 = k\vec{u} \times \vec{v}, \quad k \in R.$$

Πράγματι, αν το διάνυσμα $\vec{x}_0$ είναι λύση της (i), τότε, λόγω του ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ και της (4.22), η (i) δίνει

$$\begin{aligned}(k\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v} &= k(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}-kv^2\vec{u}\\ &= -kv^2\vec{u}\\ &= \vec{u},\end{aligned}$$

οπότε

$$-kv^2=1 \quad \text{ή} \quad k=-\frac{1}{v^2}.$$

Επομένως, αν τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε μία λύση της (i) είναι το διάνυσμα

$$\vec{x}=-\frac{1}{v^2}\vec{u}\times\vec{v}$$

β) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.16, τα $\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}$ αποτελούν μία βάση του R^3 , οπότε κάθε διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\vec{x}=k\vec{u}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{u}\times\vec{v}. \tag{ii}$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της (ii) επί $\vec{u}$

$$\vec{x}\cdot\vec{u}=k\vec{u}\cdot\vec{u}+\lambda\vec{v}\cdot\vec{u}+\mu(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}. \tag{iii}$$

Λόγω της (i),

$$\begin{aligned}\vec{x}\perp\vec{u}, &\quad \text{οπότε} \quad \vec{x}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{v}\perp\vec{u}, &\quad \text{οπότε} \quad \vec{v}\cdot\vec{u}=0\end{aligned}.$$

Επίσης,

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0.$$

Έτσι, από τη (iii) προκύπτει

$$0=ku^2 \quad \text{ή} \quad k=0.$$

Παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της (ii) επί $\vec{v}$ (έχοντας θέσει $k=0$) προκύπτει

$$\vec{x}\times\vec{v}=\lambda\vec{v}\times\vec{v}+\mu(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}. \tag{iv}$$

Επειδή

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}=(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}-v^2\vec{u}=-v^2\vec{u}$$

και, λόγω της (i) και του ότι $\vec{v}\times\vec{v}=0$, η (iv) γίνεται

$$\vec{u}=-\mu v^2\vec{u},$$

οπότε

$$\mu v^2=-1 \quad \text{ή} \quad \mu=-\frac{1}{v^2}.$$

Επομένως, η γενική λύση της (i) είναι

$$\vec{x}=\lambda\vec{v}-\frac{1}{v^2}(\vec{u}\times\vec{v}), \quad \lambda\in R.$$

Άσκηση 4.37 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ του χώρου και ένας πραγματικός αριθμός λ. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$ που επαληθεύει τις εξισώσεις

$$\vec{x}\cdot\vec{u}=\lambda \quad \text{και} \quad \vec{x}\times\vec{v}=\vec{w}$$

αν και μόνον αν $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, το οποίο να βρεθεί συναρτήσει των $\vec{j},\vec{v},\vec{w}$ και λ.

Λύση

Σύμφωνα με τη λύση της προηγούμενης άσκησης κάθε διάνυσμα

$$\vec{x}=k\vec{v}-\frac{1}{v^2}(\vec{w}\times\vec{v}), \quad k\in R \tag{i}$$

ικανοποιεί την $\vec{x}\times\vec{v}=\vec{w}$ αν και μόνον αν $\vec{v}\perp\vec{w}$ ή $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.
Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της σχέσης επί $\vec{u}$,

$$\vec{x}\cdot\vec{u}=k\vec{v}\cdot\vec{u}-\frac{1}{v^2}(\vec{w}\times\vec{v})\cdot\vec{u}$$

οπότε, λόγω της $\vec{x}\cdot\vec{u}=\lambda$,

$$\lambda = k\vec{v}\cdot\vec{u} - \frac{1}{v^2}(\vec{w},\vec{v},\vec{u}).$$

Επομένως, επειδή $\vec{v}\cdot\vec{u}\neq 0$ ($\vec{u},\vec{v}$ δεν είναι κάθετα)

$$k = \frac{1}{\vec{v}\cdot\vec{u}}\left(\lambda + \frac{1}{v^2}(\vec{w},\vec{v},\vec{u})\right),$$

οπότε η (i) πληρείται μόνο από το διάνυσμα

$$\vec{x} = \frac{1}{\vec{v}\cdot\vec{u}}\left[\lambda + \frac{1}{v^2}(\vec{w},\vec{v},\vec{u})\right]\vec{v} - \frac{1}{v^2}(\vec{w}\times\vec{v}).$$

Άσκηση 4.38 Αν για τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \vec{a}\cdot\vec{\gamma},\ \ \vec{a}\times\vec{\beta} = \vec{a}\times\vec{\gamma}\ \text{ και }\ \vec{a}\neq\vec{0},$$

τότε να δειχθεί ότι

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma}.$$

Λύση

Παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της $\vec{a}\times\vec{\beta} = \vec{a}\times\vec{\gamma}$ επί $\vec{a}$ προκύπτει

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{\beta}) = \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{\gamma})$$

ή

$$(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{a} - \vec{a}^2\vec{\beta} = (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{a} - \vec{a}^2\vec{\gamma}.$$

Άρα, λόγω και του ότι $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \vec{a}\cdot\vec{\gamma}$,

$$-|\vec{a}|^2\vec{\beta} = -|\vec{a}|^2\vec{\gamma}\quad \text{ή}\quad |\vec{a}|^2(\vec{\gamma}-\vec{\beta}) = 0,$$

οπότε ($|\vec{a}|^2\neq 0$, επειδή $\vec{a}\neq 0$)

$$\vec{\gamma}-\vec{\beta} = 0\quad \text{ή}\quad \vec{\beta} = \vec{\gamma}.$$

Άσκηση 4.40 Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ και κάθε $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει:

$$\frac{|\vec{x}|^2}{\sin^2\theta} + \frac{|\vec{y}|^2}{\cos^2\theta} \geq |\vec{x}+\vec{y}|^2.$$

Λύση

Επειδή

$$|\vec{x}| + |\vec{y}| \geq |\vec{x}+\vec{y}|,$$

ή

$$(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 \geq |\vec{x}+\vec{y}|^2,$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{|\vec{x}|^2}{\sin^2\theta} + \frac{|\vec{y}|^2}{\cos^2\theta} \geq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2. \tag{i}$$

Επειδή

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

θέτουμε $k = \sin^2\theta$, οπότε $\cos^2\theta = 1-k$.
Έτσι, η (i) γράφεται

$$\frac{|\vec{x}|^2}{k} + \frac{|\vec{y}|^2}{1-k} \geq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2. \tag{ii}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές και γράφουμε την (ii) ως β′ βάθμια ανίσωση ως προς k.

$$(1-k)|\vec{x}|^2 + k|\vec{y}|^2 \geq k(1-k)\,(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

ή (γράφοντας, μετά από λίγες πράξεις, τη σχέση αυτή ως τριώνυμο ως προς k)

$$(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 k^2 - 2|\vec{x}|(|\vec{x}| + |\vec{y}|)k + |\vec{x}|^2 \geq 0$$

Η διακρίνουσα της ανίσωσης αυτής είναι

$$\Delta = (-2|\vec{x}|(|\vec{x}| + |\vec{y}|))^2 - 4(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2|\vec{x}|^2 = 0,$$

οπότε η ανίσωση αυτή, άρα και η (ii) (που είναι ισοδύναμη με αυτή), αληθεύει για κάθε $k \in (0,1)$.

Άσκηση 4.42 Για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ του R^3 ισχύουν τα εξής:

$$|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1$$

$$(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}, \quad (\vec{a}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$$

Να βρεθεί, ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, ένα διάνυσμα $\vec{u}$ του V κάθετο στο $\vec{a}$ και στο $\vec{\beta}$, για το οποίο ισχύει

$$\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{u} = 2\vec{\gamma}.$$

Λύση

Επειδή τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ως γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν βάση του V, το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός τους,

$$\vec{u} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}.$$

Επειδή το $\vec{u}$ είναι κάθετο στο $\vec{a}$ και στο $\vec{\beta}$, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της σχέσης αυτής διαδοχικά με τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ προκύπτει (λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου)

$$\begin{aligned} k\vec{a}^2 + \lambda\vec{a}\cdot\vec{\beta} + \mu\vec{a}\cdot\vec{\gamma} &= \vec{a}\cdot\vec{u} = 0 \\ k\vec{a}\cdot\vec{\beta} + \lambda\vec{\beta}^2 + \mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} &= \vec{\beta}\cdot\vec{u} = 0 \\ k\vec{a}\cdot\vec{\gamma} + \lambda\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \mu\vec{\gamma}^2 &= \vec{\gamma}\cdot\vec{u}. \end{aligned}$$

Ισχύει

$$\text{προβ}_{\vec{\gamma}}\vec{u} = 2\vec{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\vec{u}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|^2}\vec{\gamma} = 2\vec{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\vec{u}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{\vec{u}\cdot\vec{\gamma}}{1^2} = 2,$$

οπότε

$$\vec{u}\cdot\vec{\gamma} = 2.$$

Επομένως τα k, λ, μ είναι οι ρίζες του συστήματος

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 k + (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\lambda + (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\mu &= 0 \\ (\vec{a}\cdot\vec{\beta})k + |\vec{\beta}|^2\lambda + (\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\mu &= 0 \\ (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})k + (\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\lambda + |\vec{\gamma}|^2\mu &= 2. \end{aligned} \qquad (i)$$

Επειδή $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$,

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.11,

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{\beta} &= |\vec{a}||\vec{\beta}|\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 2\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -2 \\ \vec{a}\cdot\vec{\gamma} &= |\vec{a}||\vec{\gamma}|\cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Επίσης

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{\beta}|^2 = 2^2 = 4 \;\; \text{και} \;\; |\vec{\gamma}|^2 = 1^2 = 2,$$

οπότε το σύστημα (i) γίνεται

$$\begin{aligned} 4k - 2\lambda + \mu &= 0 \\ -2k + 4\lambda + 0 \cdot \mu &= 0 \\ k + 0 \cdot \lambda + \mu &= 2. \end{aligned}$$

Εύκολα προκύπτει ότι η λύση του συστήματος αυτού είναι

$$k = -1, \ \lambda = -\frac{1}{2}, \ \mu = 3,$$

οπότε

$$\vec{u} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}.$$

Άσκηση 4.44 Για τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του χώρου ισχύει

$$|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1, \quad |\vec{\gamma}| = 2$$

$$(\vec{a}, \vec{\gamma}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{3}, \quad \text{και} \quad \vec{a} \perp \vec{\beta}$$

Να βρεθεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύει

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 1, \ \ \vec{\beta} \cdot \vec{u} = 0 \ \text{ και } \ \vec{\gamma} \cdot \vec{u} = 0. \qquad (i)$$

Λύση

α) Επειδή τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ως γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\vec{u} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}.$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της σχέσης αυτής διαδοχικά με τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ προκύπτει (λόγω και της αντιμεταθετικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου)

$$\begin{aligned} k\vec{a}^2 + \lambda\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \mu\vec{a} \cdot \vec{\gamma} &= \vec{a} \cdot \vec{u} = 1 \\ k\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \lambda\vec{\beta}^2 + \mu\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} &= \vec{\beta} \cdot \vec{u} = 0 \\ k\vec{a} \cdot \vec{\gamma} + \lambda\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \mu\vec{\gamma}^2 &= \vec{\gamma} \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned}$$

Επομένως τα k, λ, μ είναι οι ρίζες του συστήματος

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 k + (\vec{a} \cdot \vec{\beta})\lambda + (\vec{a} \cdot \vec{\gamma})\mu &= 1 \\ (\vec{a} \cdot \vec{\beta})k + |\vec{\beta}|^2\lambda + (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\mu &= 0 \\ (\vec{a} \cdot \vec{\gamma})k + (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\lambda + |\vec{\gamma}|^2\mu &= 0. \end{aligned} \qquad (ii)$$

Επειδή $\vec{a} \perp \beta$,

$$\vec{a} \cdot \beta = 0.$$

Από τον ορισμό 4.11 του εσωτερικού γινομένου

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{\gamma} &= |\vec{a}||\vec{\gamma}| \cos(\vec{a}, \vec{\gamma}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} &= |\vec{\beta}||\vec{\gamma}| \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Επίσης

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{\beta}|^2 = 1^2 = 1 \ \text{ και } \ |\vec{\gamma}|^2 = 2^2 = 4$$

οπότε το σύστημα (ii) γίνεται

$$\begin{aligned} k + 0 \cdot \lambda + \mu &= 1 \\ 0 \cdot k + \lambda + \mu &= 0 \\ \vec{k} + \lambda + 4\mu &= 0. \end{aligned}$$

Εύκολα προκύπτει ότι η λύση του συστήματος αυτού είναι

$$k = \frac{3}{2}, \ \lambda = \frac{1}{2}, \ \mu = -\frac{1}{2},$$

οπότε

$$\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{g}.$$

Άσκηση 4.45 Να δειχθεί ότι για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του χώρου ισχύει

$$|\vec{a}+\vec{\beta}|^2 \leq (1+|\vec{a}|^2)(1+|\vec{\beta}|^2).$$

Λύση

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα

$$|\vec{a}+\vec{\beta}| \leq |\vec{a}|+|\vec{\beta}|$$

οπότε

$$|\vec{a}+\vec{\beta}|^2 \leq \left(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|\right)^2$$

ή

$$\left(\vec{a}+\vec{\beta}\right)^2 \leq \left(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|\right)^2 \qquad (i)$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι

ή

$$\left(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|\right)^2 \leq (1+|\vec{a}|^2)(1+|\vec{\beta}|^2) \qquad (ii)$$

Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$|\vec{a}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{a}||\vec{\beta}| \leq 1+|\vec{a}|^2+|\vec{\beta}|^2+|\vec{a}|^2|\vec{\beta}|^2$$

ή

$$2|\vec{a}||\vec{\beta}| \leq 1+|\vec{a}|^2|\vec{\beta}|^2$$

ή

$$1+\left(|\vec{a}||\vec{\beta}|\right)^2-2|\vec{a}||\vec{\beta}| \geq 0$$

ή

$$\left(1-|\vec{a}||\vec{\beta}|\right)^2 \geq 0$$

Η σχέση αυτή είναι αληθής για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του χώρου, οπότε και η ισοδύναμη της (ii) είναι αληθής για κάθε $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
Από τις (i) και (ii) είναι φανερό ότι

$$|\vec{a}+\vec{\beta}|^2 \leq (1+|\vec{a}|^2)(1+|\vec{\beta}|^2).$$

Άσκηση 4.48 α) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\beta^2+\gamma^2-a^2\right), \qquad (i)$$

όπου $a=(B\Gamma)$, $\beta=(A\Gamma)$, $\gamma=(AB)$.
β) Ποιο θεώρημα προκύπτει από τη σχέση αυτή αν $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$;

Λύση

α) Για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ ισχύει

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma},$$

οπότε

$$|\overrightarrow{B\Gamma}|^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma})^2 = |\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{A\Gamma}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}. \qquad (ii)$$

Επειδή

$$|\overrightarrow{BA}|=\gamma,\ |\overrightarrow{B\Gamma}|=a,\ |\overrightarrow{A\Gamma}|=\beta \ \text{ και } \ \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB},$$

η (ii) γίνεται

$$a^2=\gamma^2+\beta^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$$

ή

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\beta^2+\gamma^2-a^2\right).$$

β) Στην περίπτωση στην οποία $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ (τα A, B, Γ ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{BA\Gamma}=90^0$), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$, οπότε η (i) γίνεται

$$\frac{1}{2}\left(\beta^2+\gamma^2-a^2\right)=0 \quad \text{ή} \quad \beta^2+\gamma^2=a^2$$

ή

$$(B\Gamma)^2=(A\Gamma)^2+(AB)^2.$$

Επομένως, από την (i) για $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ προκύπτει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Κεφάλαιο 6

Γραμμές και επιφάνειες στο χώρο

Άσκηση 6.3 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου π που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στα επίπεδα

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ x - 2y + z = 0 \\ \pi_2 &: \ y - z = 1 \end{aligned}$$

Λύση

Τα επίπεδα αυτά είναι κάθετα αντίστοιχα στα διανύσματα

$$\vec{n}_1 = (1, -2, 1) \ \text{ και } \ \vec{n}_2 = (0, 1, -1)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.13, ένα διάνυσμα κάθετο και στα δύο επίπεδα, δηλαδή κάθετο και στα διανύσματα $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \widehat{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \widehat{e}_1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \widehat{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \widehat{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \widehat{e}_1 + \widehat{e}_2 + \widehat{e}_3 \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

οπότε η εξίσωση του επιπέδου π είναι (διέρχεται από την αρχή των αξόνων)

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n}\vec{0} \ \Leftrightarrow \ (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = (1, 1, 1) \cdot (0, 0, 0)$$

ή

$$x + y + z = 0.$$

Άσκηση 6.7 α) Να δειχθεί ότι οι ευθείες

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &: \ \vec{r}(t) = (1 - 3t, 2t, 1 + t) \\ \epsilon_2 &: \ \vec{r}(u) = (6u, 1 - 4u, 2 - 2u) \end{aligned}$$

είναι παράλληλες.

β) Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τις ϵ_1, ϵ_2.

Λύση

α) Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες με τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (3, 2, 1) \ \text{και} \ \vec{v}_2 = (6, -4, -2).$$

Επειδή

$$\frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2},$$

τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ είναι παράλληλα, οπότε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.
β) Ένα σημείο της ϵ_1 είναι το $A_1(1,0,1)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_1 για $t = 0$) και ένα σημείο της ϵ_2 είναι το $A_2(0,1,2)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_2 για $u = 0$)
Τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\overrightarrow{A_1A_2}$ είναι παράλληλα με το π, οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο π είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{v}_1 \\ &= [(0,1,2) - (1,0,1)] \times (3,2,1) \\ &= (-1,1,1) \times (3,2,1) \\ &= (-1,4,-5). \end{aligned}$$

Επομένως, το επίπεδο π, που διέρχεται και από το σημείο A_1 με διάνυσμα θέσης $\vec{a}_1$, έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - a_1) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}_1$$

ή, αν $\vec{r} = (x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του π,

$$(-1,4,-5) \cdot (x,y,z) = (-1,4,-5) \cdot (1,0,1).$$

Επομένως, η καρτεσιανή εξίσωση του π είναι

$$-x + 4y - 5z = -6.$$

Άσκηση 6.20 α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - z - 2 = 0 \qquad (i)$$

είναι εξίσωση σφαίρας και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της.
β) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας στο σημείο στο οποίο τέμνει τον $+z-$άξονα.

Λύση
α) Η (i) γράφεται

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2 \cdot \frac{1}{2} z = 2 \qquad (i)$$

οπότε, προσθέτοντας και στα 2 μέλη το $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ προκύπτει

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ή

$$(x+1)^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{13}{4}.$$

Η σχέση αυτή είναι καρτεσιανή εξίσωση σφαίρας με κέντρο το σημείο

$$K\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

και ακτίνα

$$R = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

β) Η επιφάνεια (i) τέμνει τον $+z-$άξονα στα σημεία όπου $x = 0$ και $y = 0$ οπότε η (i) γίνεται

$$z^2 - z - 2 = 0 \iff z = 2 \quad \text{ή} \quad z = -1$$

οπότε το σημείο είναι (θετικός $z-$άξονας)

$$A(0,0,2)$$

η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι (βλ. Πρόταση 5.2)

$$n \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{p} \qquad (ii)$$

και ένα κάθετο διάνυσμα στο σημείο A είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 6.9 το

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_A,$$

όπου

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - z - 2,$$

οπότε οι μερικές παράγωγοι στο σημείο A είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A &= 2x + 2|_{x=0} = 2 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A &= 2y|_{y=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_A &= 2z - 1|_{z=2} = 3 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\vec{n} = (2,0,3)$$

Έτσι, αν (x,y,z) οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου η (ii) γίνεται

$$\begin{aligned} n \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{p} \quad &\Leftrightarrow \quad (2,3,0)\cdot(x,y,z) = (2,3,0)\cdot(0,0,2) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + 3z - 6 = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.23 Να βρεθεί καρτεσιανή εξίσωση για το επίπεδο π το οποίο περιέχει το σημείο $A(1,0,-1)$ και την τομή των επιπέδων

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ x - y + z = 1 \\ \pi_2 &: \ x + y = 0. \end{aligned}$$

Λύση

Κάθε επίπεδο που περιέχει την τομή των επιπέδων π_1, π_2 έχει εξίσωση

$$x + y = 0 \quad \text{ή} \quad x - y + z - 1 + \lambda(x+y) = 0, \ \lambda \in R. \tag{i}$$

Το ζητούμενο επίπεδο δεν είναι το $x + y = 0$, διότι οι συντεταγμένες του σημείου $A(1,0,-1)$ δεν επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.
Αν το A ανήκει στο επίπεδο που περιγράφεται από τη δεύτερη των (i), πρέπει οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν, δηλαδή

$$1 - 0 + (-1) - 1 + \lambda(1+0) = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

Άρα το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση (θέτουμε $\lambda = 1$ στην (i))

$$x - y + z - 1 + (x+y) = 0$$

ή

$$2x + z - 1 = 0.$$

Άσκηση 6.25 α) Να δειχθεί ότι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 με διανυσματικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &: \ \vec{r} = (5,1,5) + \lambda(1,-1,-2) \\ \epsilon_2 &: \ \vec{r} = (1,-4,10) + \mu(2,-2,-4) \end{aligned}$$

είναι παράλληλες.
β) Αν το επίπεδο π_1 περιέχει τις ϵ_1, ϵ_2, να βρεθεί το επίπεδο π_2 που είναι παράλληλο με το π_1 και περιέχει την αρχή των αξόνων.
γ) Να εξεταστεί αν το π_2 περιέχει την ευθεία

$$\epsilon_3 : \vec{r} = (1,11,2) + t(4,-14,2)$$

Λύση

α) Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες με τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,-1,-2) \text{ και } \vec{v}_2 = (2,-2,-4).$$

Επειδή

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4},$$

τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ είναι παράλληλα, οπότε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.
β) Ένα σημείο της ϵ_1 είναι το $A_1(5,1,5)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_1 για $\lambda = 0$) και ένα σημείο της ϵ_2 είναι το $A_2(1,-4,10)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_2 για $\mu = 0$)
Τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\overrightarrow{A_1A_2}$ είναι παράλληλα με το π_1, οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο π_1 είναι το

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{v}_1 \\
&= [(1,-4,10) - (5,1,5)] \times (1,-1,-2) \\
&= (-4,-5,5) \times (1,-1,-2) \\
&= (15,-3,9).
\end{aligned}$$

Επομένως, το επίπεδο π_2, που περιέχει την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$$

ή, αν $\vec{r} = (x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του π_2,

$$(15,-3,9) \cdot (x,y,z) = 0.$$

Επομένως, η καρτεσιανή εξίσωση του π είναι

$$15x - 3y + 9z = 0.$$

Άσκηση 6.26 Η ευθεία δ είναι παράλληλη με την ευθεία

$$l : x - 2y + z = 0, \;\; 2x - z + 5 = 0 \qquad (i)$$

και διέρχεται από το σημείο $A(1,0,-1)$.
Να βρεθουν διανυσματικές εξισώσεις για τις ευθείες l και δ.

Λύση
Θέτοντας $z = t$, οι (i) γράφονται

$$x - 2y = -t, \;\; 2x = t - 5,$$

από τις οποίες προκύπτει

$$x = \frac{t-5}{2}, \quad y = \frac{3t-5}{4}.$$

Επομένως η διανυσματική εξίσωση της ευθείας l είναι

$$l: \; \vec{r}(t) = \left(\frac{t-5}{2}, \frac{3t-5}{4}, t\right), \quad t \in R. \qquad (ii)$$

Η διανυσματική εξίσωση της δ είναι

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{a} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in R, \qquad (iii)$$

όπου $\vec{a} = (1,0,-1)$ το διάνυσμα θέσης του Α, ως προς την αρχή των αξόνων Ο, και $\vec{u}$ ένα διάνυσμα παράλληλο με την δ, άρα και με την l (αφού $l \parallel \delta$).
Γράφοντας την (ii) στη μορφή

$$l: \; x(t) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, 0\right) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right), \; t \in R,$$

είναι φανερό ότι ένα διάνυσμα παράλληλο στην l είναι το $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$.
Αντικαθιστώντας στην (iii) προκύπτει η διανυσματική εξίσωση της δ

$$\delta: \vec{r}(\lambda) = (1,0,-1) + \lambda\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right) = \left(1+\frac{\lambda}{2},\frac{3\lambda}{4},-1+\lambda\right), \quad \lambda \in R.$$

Ἀσκηση 6.29 Να βρεθεί η απόσταση της ευθείας

$$\epsilon : 2x + y + z + 1 = 0, \;\; x - y + z + 3 = 0$$

από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Σύμφωνα με το παράδ. 6.11, το διάνυσμα θέσης του ίχνους Β της καθέτου που άγεται από την αρχή των αξόνων O προς την ευθεία ϵ είναι ($\vec{p} = 0$)

$$\vec{\beta} = \vec{a} + \frac{-\vec{a}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}, \tag{ii}$$

όπου $\vec{a}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το Ο ενός σημείου της ϵ και $\vec{u}$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ϵ. Θέτοντας $x = 0$ στις εξισώσεις της ϵ προκύπτει

$$\epsilon : y + z + 1 = 0, \;\; -y + z + 3 = 0.$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$y = 1, z = -2,$$

οπότε ένα σημείο της είναι το A, που έχει διάνυσμα θέσης, ως προς το Ο,

$$\vec{a} = (0,1,-2).$$

Ένα διάνυσμα παράλληλο με την ϵ είναι το

$$\vec{u} = (2,1,1) \times (1,-1,1) = (2,-1,-3).$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned}\vec{\beta} &= (0,1,-2) + \frac{-(0,1,-2)\cdot(2,-1,-3)}{2^2+(-1)^2+(-3)^2}(2,-1,-3)\\ &= (0,1,-2) - \frac{5}{14}(2,-1,-3)\\ &= \left(-\frac{5}{7},\frac{19}{14},-\frac{13}{14}\right)\end{aligned}$$

οπότε η απόσταση της ευθείας ϵ από την αρχή των αξόνων είναι

$$\begin{aligned}d &= (OB) = |\vec{\beta}|\\ &= \sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{19}{14}\right)^2 + \left(-\frac{13}{14}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{630}}{14} = 1,79.\end{aligned}$$

Ἀσκηση 6.31 Το διάνυσμα θέσης, ως προς ένα σημείο αναφοράς O, την χρονική στιγμή t ενός υλικού σημείου Σ, που κινείται στον χώρο, είναι

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 2t)\widehat{e}_x + (4-t)\widehat{e}_y + (10 - t^2 + 2t)\widehat{e}_z,$$

όπου $\widehat{e}_x$, $\widehat{e}_y$ και $\widehat{e}_z$ μοναδιαία διανύσματα κατά την κατεύθυνση των αξόνων.
α) Να υπολογιστούν η ταχύτητα και επιτάχυνση του Σ την χρονική στιγμή $t = 1$.
β) Να βρεθεί διανυσματική εξίσωση της εφαπτομένης της τροχιάς του Σ στην θέση του τη χρονική στιγμή $t = 1$.

Λύση

α) Η ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= (2t-2)\widehat{e}_x + (-1)\widehat{e}_y + (-2t+2)\widehat{e}_z\end{aligned}$$

και η επιτάχυνση του

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ &= 2\widehat{e}_x - 2\widehat{e}_z\end{aligned}$$

οπότε η ταχύτητα και η επιτάχυνση του Σ τη χρονική στιγμή $t = 1$ είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}(1) &= (2\cdot 1 - 2)\widehat{e}_x + (-1)\widehat{e}_y + (-2\cdot 1 + 2)\widehat{e}_z \\ &= -\widehat{e}_y \\ \vec{a}(1) &= 2\widehat{e}_x - 2\widehat{e}_z\end{aligned}$$

β) Τη χρονική στιγμή $t = 1$ το Σ βρίσκεται στο σημείο με διάνυσμα θέσης

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{r}(1) \\ &= (1^2 - 2\cdot 1)\widehat{e}_x + (4-1)\widehat{e}_y + (10 - 1^2 + 2\cdot 1)\widehat{e}_z \\ &= -\widehat{e}_x + 3\widehat{e}_y + 11\widehat{e}_z\end{aligned}$$

δηλαδή στο σημείο

$$P(-1,3,11)$$

οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει διανυσματική εξίσωση (είναι παράλληλη στο διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}(1)$)

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{p} + \lambda\vec{v}(1)$$

ή
$$\vec{r}(\lambda) = (-1,3,11) + \lambda(0,-1,0), \quad \lambda \in R.$$

Άσκηση 6.33 Αν P είναι το σημείο τομής του επιπέδου

$$\pi:\ 2x + y - z + 2 = 0$$

και της ευθείας

$$l:\ x = -3t,\ y = -4 + 2t,\ z = 5 + 3t$$

να βρεθεί διανυσματική εξίσωση για την ευθεία ϵ που διέρχεται από το σημείο P και είναι κάθετη στα διανύσματα $\vec{a} = (1,1,1)$ και $\vec{\beta} = (2,3,4)$.

Λύση

Αντικαθιστώντας τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ϵ στην καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου π προκύπτει

$$\pi:\ 2(-3t) - 4 + 2t - (5+3t) + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ -7t - 7 = 0 \ \Leftrightarrow\ t = -1,$$

οπότε

$$P\left(-3(-1), -4 + 2(-1), 5 + 3(-1)\right) = (3,-6,2).$$

Επειδή η ευθεία ϵ είναι κάθετη στα διανύσματα $\vec{a} = (1,1,1)$ και $\vec{\beta} = (2,3,4)$, ένα διάνυσμα παράλληλο με αυτή είναι το

$$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{\beta} = (1,1,1) \times (2,3,4) = (1,-2,1),$$

οπότε η εξίσωση της ϵ είναι

$$\vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{u}$$

ή
$$\vec{r}(t) = (3,-6,2) + t(1,-2,1), \quad t \in R.$$

Άσκηση 6.35 Τα επίπεδα π_1, π_2 έχουν καρτεσιανές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ x + 2y + 4z = 1 \\ \pi_2 &: \ x + y = 3 \end{aligned}$$

Να βρεθούν:
α) Καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου π που είναι κάθετο στα π_1, π_2 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Διανυσματική εξίσωση της ευθείας ϵ που είναι παράλληλη στα π_1, π_2 και διέρχεται από το σημείο $M(-3, 0, 1)$.

Λύση
α) Από το σύστημα των εξισώσεων των π_1, π_2 προκύπτει ότι

$$x = 5 + 4z \ \text{ και } \ y = -2 - 4z,$$

οπότε τα π_1, π_2 τέμνονται κατά την ευθεία ϵ με διανυσματική εξίσωση (θέτουμε $z = k$)

$$\vec{r}(k) = (5 + 4k, -2 - 4k, k), \quad k \in R. \qquad (i)$$

Το επίπεδο π, που είναι κάθετο στα π_1, π_2, είναι κάθετο στην ευθεία ϵ, άρα και στο διάνυσμα

$$\vec{u} = (4, -4, 1),$$

στο οποίο είναι παράλληλη η ϵ, λόγω της (i).
Άρα το π, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = 0$$

ή

$$(4, -4, 1) \cdot (x, y, z) = 0$$

ή

$$4x - 4y + z = 0.$$

β) Η ευθεία ϵ είναι παράλληλη στα π_1, π_2, οπότε ένα διάνυσμα παράλληλο με αυτή είναι το

$$\vec{n} = (4, -4, 1)$$

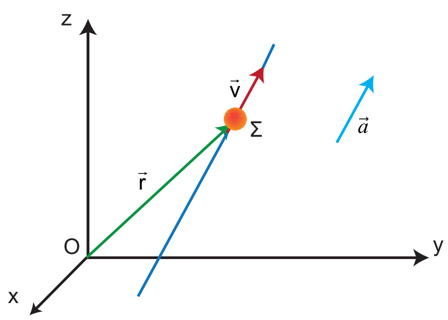
οπότε η διανυσματική της εξίσωση είναι

$$\vec{r}(t) = (-3, 0, 1) + (4, -4, 1)t$$

Άσκηση 6.36 Ένα υλικό σημείο Σ μάζας $m = 2Kg$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε) με διανυσματική εξίσωση, ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$,

$$\epsilon : \ \vec{r}(t) = (-2\lambda - 1, \lambda + 1, 2\lambda + 1), \quad \lambda \in R$$

με σταθερή ταχύτητα $v = 3\dfrac{m}{s}$ έτσι ώστε η τεταγμένη του y να αυξάνει.
Να υπολογιστούν τη στιγμή που το Σ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1, 1)$:
α) Η στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων O.
β) Η στροφορμή του ως προς το σημείο $K(2, 0, -1)$.



Λύση

α) Η εξίσωση της ευθείας (ε) γράφεται

$$\vec{r}(t) = (-1,1,1) + \lambda(-2,1,2),$$

οπότε η (ε) είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\vec{e} = (-2,1,2).$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ταχύτητας του Σ είναι το

$$\widehat{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),$$

οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας του Σ είναι

$$\vec{v} = v\widehat{e} = 3\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = (-2,1,2).$$

Έτσι, σύμφωνα με την (4.51), η στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων είναι

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m\vec{r}\times\vec{v}\\
&= 2(-1,1,1)\times(-2,1,2)\\
&= 2\begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\\
&= 2\left[\widehat{e}_x(1\cdot 2-1\cdot 1)-\widehat{e}_y(-1\cdot 2-1(-2))+\widehat{e}_z(-1\cdot 1-1(-2))\right]\\
&= 2\left(\widehat{e}_x+\widehat{e}_z\right)\left(\tfrac{Kgr\cdot m^2}{s}\right)
\end{aligned}$$

β) Η στροφορμή του Σ ως προς το σημείο $K(2,0,-1)$ είναι

$$\vec{L} = m\vec{r}\,'\times\vec{v}$$

όπου $\vec{r}\,'$ το διάνυσμα θέσης του Σ ως προς το Κ, το οποίο είναι

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,' &= \overrightarrow{KA}\\
&= \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}\\
&= (-1,1,1)-(2,0,-1)\\
&= (-3,1,2)
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= 2(-3,1,2)\times(-2,1,2)\\
&= 2\begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z\\ -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\\
&= 2\left[\widehat{e}_x(1\cdot 2-2\cdot 1)-\widehat{e}_y(-3\cdot 2-2(-2))+\widehat{e}_z(-3\cdot 1-1(-2))\right]\\
&= 2\left(2\widehat{e}_y-\widehat{e}_z\right)\left(\tfrac{Kgr\cdot m^2}{s}\right)
\end{aligned}$$

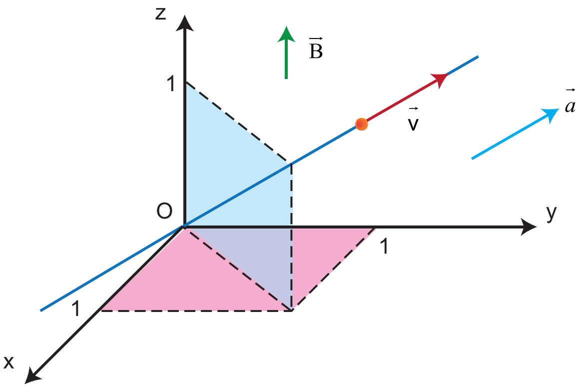
Άσκηση 6.39 Να υπολογιστεί η μαγνητική δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται ένα σωματίδιο φορτίου $q = 2\mu C$ και μάζας $m = 100gr$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $v = 9\dfrac{m}{s}$ κατά μήκος της ευθείας

$$x = y = z$$

προς τα θετικά των αξόνων μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 2\cdot 10^{-4}\widehat{e}_z\,(T)$.

Λύση

Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε) είναι



$$\vec{r}(\lambda) = (\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1,1,1), \quad \lambda \in R,$$

οπότε είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\vec{e} = (1,1,1).$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ταχύτητας είναι το

$$\widehat{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

οπότε το διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι

$$\vec{v} = v\widehat{e} = 9\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = 3\sqrt{3}(1,1,1).$$

Έτσι, σύμφωνα με την (4.52), η μαγνητική δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται το φορτίο είναι

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\
&= 2\cdot 10^{-6}\cdot 3\sqrt{3}(1,1,1) \times 2\cdot 10^{-4}(0,0,1) \\
&= 12\sqrt{3}\cdot 10^{-10}(1,1,1) \times (0,0,1) \\
&= 12\sqrt{3}\cdot 10^{-10}\begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 12\sqrt{3}\cdot 10^{-10}(\widehat{e}_x(1\cdot 1 - 1\cdot 0) - \widehat{e}_y(1\cdot 1 - 1\cdot 0) + \widehat{e}_z(1\cdot 0 - 0\cdot 1)) \\
&= 12\sqrt{3}\cdot 10^{-10}(\widehat{e}_x - \widehat{e}_y)\ (N)
\end{aligned}$$

Άσκηση 6.41 Να βρεθεί εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια S με καρτεσιανή εξίσωση

$$z = x^2 + y^2$$

στο σημείο της $P(1,0,1)$.

Λύση

Το εφαπτόμενο επίπεδο π στην S στο σημείο της P έχει εξίσωση

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{p}) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{n}\cdot\vec{r} = \vec{n}\cdot\vec{p}, \qquad (i)$$

όπου $\vec{p} = (1,0,1)$ το διάνυσμα θέσης του P και

$$\vec{n} = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_p \qquad (ii)$$

ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο P, όπου

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$$

η καρτεσιανή εξίσωση της S.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p = 2x|_{x=1} = 2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p = 2y|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p = -1,$$

όποτε η (ii) δίνει $\vec{n} = (2,0,-1)$.
Έτσι, αν $\vec{r} = (x,y,z)$ οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου του π, η (i) γίνεται

$$(2,0,-1)\cdot(x,y,z) = (2,0,-1)\cdot(1,0,1)$$

ή

$$2x - z = 1.$$

Άσκηση 6.43 Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ, ΓΔ αν τα διανύσματα θέσης των Α, Β, Γ, Δ είναι $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $5\vec{a}$, $3\vec{\beta}$ αντίστοιχα, όπου $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ μή παράλληλα διανύσματα.

Λύση
Το διάνυσμα θέσης κάθε σημείου της ευθείας ΑΒ που διέρχεται από τα σημεία Α, Β με διανύσματα θέσης $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι της μορφής (βλ. παράδ. 6.7)

$$\vec{r} = k\vec{a} + (1-k)\vec{\beta}, \qquad k \in R \qquad (i)$$

και της ΓΔ, η οποία διέρχεται από τα Γ, Δ με διανύσματα θέσης $5\vec{a}$, $3\vec{\beta}$

$$\vec{r} = m5\vec{a} + (1-m)3\vec{\beta}, \qquad m \in R \qquad (ii)$$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των ΑΒ, ΓΔ πληρεί τόσο την (i) όσο και την (ii), οπότε αντιστοιχεί στις τιμές k, m για τις οποίες

$$k\vec{a} + (1-k)\vec{\beta} = 5m\vec{a} + (1-m)3\vec{\beta}$$

ή

$$(k-5m)\vec{a} + (-k+3m-2)\vec{\beta} = \vec{0} \qquad (iii)$$

Τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι μη παράλληλα διανύσματα του επιπέδου, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα (βλ. Κεφάλαιο 7), οπότε από την (iii) προκύπτει ότι

$$\left\{\begin{array}{rcl} k-5m & = & 0 \\ -k+3m-2 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} k=-5 \\ m=-1 \end{array}$$

Άρα, το διάνυσμα θέσης, $\vec{p}$, του σημείου τομής των ΑΒ, ΓΔ προκύπτει είτε από την (i) για $k=-5$ (ή από την (ii) για $m=-1$)

$$\vec{p} = -5\vec{a} + 6\vec{\beta}.$$

Άσκηση 6.44 Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν καρτεσιανές εξισώσεις

$$\epsilon_1 : \left\{\begin{array}{l} x-z=2 \\ y+3z=-1 \end{array}\right\} \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=4 \\ 3x+3y+2z=7 \end{array}\right\}$$

α) Να δειχθεί ότι οι ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται.
β) Να βρεθεί το συνημίτονο της οξείας γωνίας των ϵ_1, ϵ_2.
γ) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν οι ϵ_1, ϵ_2.

Λύση
α) Θέτοντας $z=t$ στις καρτεσιανές εξισώσεις της ϵ_1 προκύπτει

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & -1-3t, \end{array}$$

οπότε η ϵ_1 έχει διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon_1 : \ \vec{r}(t) = (2+t, -1-3t, t), \ \ t \in R. \qquad (i)$$

Θέτοντας $z=\lambda$ στις εξισώσεις της ϵ_2 και λύνοντας ως προς x, y προκύπτει

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\lambda}{3}+\frac{2}{3} \\ y &= -\frac{\lambda}{3}+\frac{5}{3}, \end{aligned}$$

οπότε η ϵ_2 έχει διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon_2 : \vec{r}(\lambda) = \left(\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}, \frac{5}{3}-\frac{\lambda}{3}, \lambda\right), \ \lambda \in R. \qquad (ii)$$

Για να τέμνονται οι ϵ_1, ϵ_2 πρέπει να υπάρχουν τιμές των t, λ ώστε

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\lambda).$$

$$\begin{aligned} 2+t &= \frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3} \\ -1-3t &= \frac{5}{3}-\frac{\lambda}{3} \\ t &= \lambda \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό αληθεύει για $t = \lambda = -1$, οπότε οι ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται στο σημείο (θέτουμε $t = -1$ στην (i) ή $\lambda = -1$ στην (ii))

$$P(1, 2, -1).$$

β) Οι $(i), (ii)$ γράφονται,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &: \vec{r}(t) = (2, -1, 0) + t(1, -3, 1) \\ \epsilon_2 &: \vec{r}(\lambda) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) + \lambda\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

οπότε οι ευθείες οι ϵ_1, ϵ_2 είναι παράλληλες με τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1, -3, 1) \quad \text{και} \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Άρα το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους είναι

$$\cos\left|\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}\right| = \left|\frac{1\left(-\frac{1}{3}\right)+(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2}}\right| = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{11}\frac{\sqrt{11}}{3}} = \frac{5}{11}.$$

γ) Το επίπεδο π που ορίζουν οι ϵ_1, ϵ_2 έχει εξίσωση

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = \vec{n}\cdot\vec{a}, \qquad (iii)$$

όπου $\vec{n}$ διάνυσμα κάθετο στο π και $\vec{a}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου του π .
Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των ϵ_1, ϵ_2 είναι

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (1, -3, 1) \times \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}(2, 1, 1)$$

άρα και το

$$\vec{n} = -\frac{3}{4}\vec{u} = (2, 1, 1).$$

Ένα σημείο του π είναι το $A(2, -1, 0)$ (προκύπτει από την (i) για $t = 0$).
Έτσι θέτοντας $\vec{r} = (x, y, z)$ η (iii) γίνεται

$$(2, 1, 1)\cdot(x, y, z) = (2, 1, 1)\cdot(2, -1, 0)$$

ή

$$2x + y + z = 3.$$

Άσκηση 6.45 Να βρεθεί το ίχνος της καθέτου που άγεται από το σημείο $\Gamma(4, 7, -9)$ προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1, -4)$ και $B(6, -5, -1)$ και η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB.

Λύση

Μπορούμε, βεβαίως, να ακολουθήσουμε τον τρόπο του παραδ. 6.11. Στην περίπτωση αυτή όμως, στην οποία γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω απλούστερη διαδικασία:

Η ευθεία ϵ είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{a} = (6, -6, 3) \quad \text{ή με το} \quad \vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$$

και διέρχεται από το σημείο A με διάνυσμα θέσης $\vec{a} = (0, 1, -4)$, οπότε έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{u} = (0, 1, -4) + t(2, -2, 1) = (2t, 1 - 2t, -4 + t). \qquad (i)$$

Έτσι, το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma M}$, όπου M τυχαίο σημείο της ϵ, είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma M} &= \vec{r}(t) - \vec{\gamma} = (2t, 1 - 2t, -4 + t) - (4, 7, -9) \\ &= (2t - 4, -6 - 2t, 5 + t). \end{aligned}$$

Το ίχνος της καθέτου B αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου t για την οποία

$$\overrightarrow{\Gamma M} \perp \vec{u} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{\Gamma M} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t - 4, -6 - 2t, 5 + t) \cdot (2, -2, 1) = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \quad \text{ή} \quad t = -1.$$

Δηλαδή το ίχνος της καθέτου από το Γ στην ε είναι το σημείο

$$M = (2(-1) - 4, -6 - 2(-1), 5 - 1) = (-6, -4, -4),$$

οπότε η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ είναι

$$|\overrightarrow{\Gamma M}| = \sqrt{(-6 - 4)^2 + (-4 - 7)^2 + (-4 - (-9))^2} = \sqrt{246}.$$

Άσκηση 6.46 Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου π που είναι κάθετο στην ευθεία

$$\epsilon : 2x + y = 5, \quad y - 3z = 1$$

και διέρχεται από το σημείο $A(1, 0, -1)$.

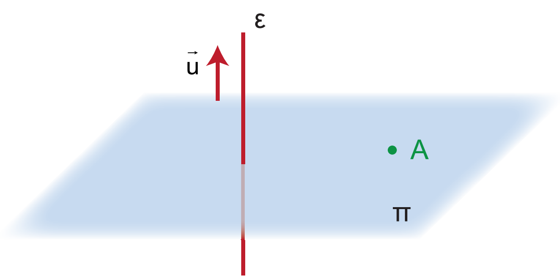
Λύση

Σύμφωνα με το παράδ. 6.24, ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ϵ είναι το

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

όπου $\vec{n}_1 = (2, 1, 0)$ και $\vec{n}_2 = (0, 1, -3)$, οπότε

$$\vec{u} = (2, 1, 0) \times (0, 1, -3) = (-3, 6, 2).$$



Σχήμα 6.18 *Το επίπεδο π περνάει από το σημείο $A(1, 0, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία (ϵ).*

Επομένως το επίπεδο π που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετο στην ϵ, άρα και στο διάνυσμα $\vec{u}$, έχει εξίσωση

$$\vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = \vec{u} \cdot \vec{a} \quad \text{ή} \quad (-3, 6, 2) \times (x, y, z) = (-3, 6, 2) \times (1, 0, -1)$$

ή
$$-3x + 6y + 2z = -3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 2(-1)$$

ή
$$-3x + 6y + 2z = -5.$$

Άσκηση 6.47 Η ευθεία ϵ_1 διέρχεται από το σημείο $A(7,-2,3)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{u}=(2,0,1)$, ενώ η ϵ_2 διέρχεται από το $B(5,-1,1)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v}=(0,1,-1)$.
Να δειχθεί ότι οι ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται και να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωσή του επιπέδου που ορίζουν.

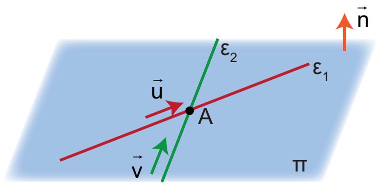
Λύση
Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν εξισώσεις

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &: \vec{r}(t)=(7,-2,3)+t(2,0,1)=(7+2t,-2,3+t) && (i)\\ \epsilon_2 &: \vec{r}(\lambda)=(5,-1,1)+\lambda(0,1,-1)=(5,-1+\lambda,1-\lambda). && (ii)\end{aligned}$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των ϵ_1, ϵ_2 θέτουμε

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(\lambda),$$

οπότε
$$(7+2t,-2,3+t)=(5,-1+\lambda,1-\lambda)$$
ή
$$\left\{\begin{array}{rcl} 7+2t &=& 5\\ -2 &=& -1+\lambda\\ 3+t &=& 1-\lambda \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} \lambda=-1\\ t=-1 \end{array}\right\}.$$



Σχήμα 6.39 *Το επίπεδο των* ϵ_1, ϵ_2.

Δηλαδή οι ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται στο σημείο A με διάνυσμα θέσης, που προκύπτει από την (i) για $t=-1$,

$$\vec{a}=(7+2(-1),-2,3-1)=(5,-2,2).$$

Το επίπεδο π που ορίζουν οι ϵ_1, ϵ_2 έχει εξίσωση

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{a})=0 \quad \text{ή} \quad \vec{n}\cdot\vec{r}=\vec{n}\cdot\vec{a}, \qquad (iii)$$

όπου $\vec{n}$ ένα διάνυσμα κάθετο σ' αυτό.
Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το (βλ. ορισμό 4.13)

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v},$$

αφού τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι παράλληλα με τις ϵ_1, ϵ_2, οι οποίες περιέχονται στο π. Δηλαδή

$$\vec{n}=(2,0,1)\times(0,1-1)=(-1,2,2),$$

οπότε η (iii) γίνεται
$$(-1,2,2)\cdot(x,y,z)=(-1,2,2)\cdot(5,-2,2) \Leftrightarrow \pi: -x+2y+2z=-5.$$

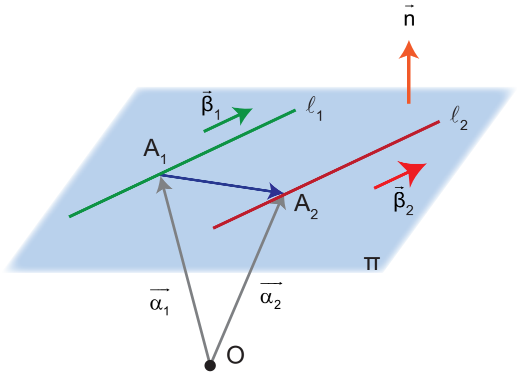
Άσκηση 6.48 Οι ευθείες l_1, l_2 έχουν διανυσματικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} l_1 &: x(t)=\vec{a}_1+t\vec{\beta}_1\\ l_2 &: x(\lambda)=\vec{a}_2+\lambda\vec{\beta}_2 \end{aligned}$$

όπου $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ δεδομένα διανύσματα με $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \neq \vec{0}$.
α) Ποια συνθήκη πρέπει να πληρείται ώστε οι l_1, l_2 να είναι παράλληλες;
β) Αν επιπλέον $\vec{a}_1=(1,-2,0)$, $\vec{a}_2=(-1,0,1)$ και $\vec{\beta}_1=(-1,-1,1)$ να βρεθεί καρτεσιανή εξίσωση του π.

Λύση
α) Οι ευθείες l_1, l_2, που είναι παράλληλες με τα διανύσματα $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$, είναι παράλληλες μεταξύ τους αν $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\beta}_2$, δηλαδή αν (βλ. παρατ. 4.5)

$$\vec{\beta}_2 = k\vec{\beta}_1,\ k \in R \quad ή \quad rank(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) = 1.$$



Σχήμα 6.40 *Οι ευθείες* l_1, l_2.

β) Τα διανύσματα $\vec{\beta}_1$ και $\overrightarrow{A_1A_2}$ είναι παράλληλα με το π, οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο π είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{\beta}_1 = (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times \vec{\beta}_1 = [(-1,0,1) - (1,-2,0)] \times (-1,-1,1) \\ &= (-2,2,1) \times (-1,-1,1) \\ &= (3,1,4). \end{aligned}$$

Επομένως, το επίπεδο π, που διέρχεται και από το σημείο A_1 με διάνυσμα θέσης $\vec{a}_1$, έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - a_1) = 0 \quad ή \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}_1$$

ή, αν $\vec{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του π,

$$(3,1,4) \cdot (x,y,z) = (3,1,4) \cdot (1,-2,0).$$

Επομένως, η καρτεσιανή εξίσωση του π είναι

$$3x + y + 4z = 1.$$

Άσκηση 6.49 Να δειχθεί ότι η απόσταση του σημείου $P = (p_1, p_2, p_3)$ από:

α) Το επίπεδο
$$\pi_1 : \ \vec{r} \cdot \vec{n} = k, \quad k \text{ σταθερά}, \qquad (i)$$
είναι
$$d = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - k|}{|\vec{n}|}$$

β) Το επίπεδο
$$\pi_2 : \ n_1x + n_2y + n_3z = k \qquad (ii)$$
είναι
$$d = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Λύση

α) Σύμφωνα με το παράδ. 6.32, η απόσταση του P από το επίπεδο π_1, το οποίο έχει εξίσωση

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad ή \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} = k \qquad (i)$$

είναι
$$d = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - \vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - k|}{|\vec{n}|}$$

β) Η εξίσωση του επιπέδου π_2 γράφεται στη μορφή

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = k,$$

όπου $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, οπότε από την (i) προκύπτει ότι η απόσταση του P από το π είναι

$$d = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - k|}{|\vec{n}|} = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Άσκηση 6.50 Να βρεθεί το ίχνος της κάθετης ευθείας που άγεται από το σημείο $P(1,0,1)$ προς την ευθεία

$$\epsilon:\ x+y+z-1=0,\quad x-z=0. \tag{i}$$

Λύση

Σύμφωνα με το παράδ. 6.11, το διάνυσμα θέσης του ίχνους B της καθέτου που άγεται από το σημείο P με διάνυσμα θέσης $\vec{p}$ προς την ευθεία ϵ που είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι

$$\vec{\beta}=\vec{a}+\frac{(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}, \tag{i}$$

όπου $\vec{a}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ϵ και $\vec{p}$ το διάνυσμα θέσης του P, οπότε θέτοντας $z=t$ και λύνοντας ως προς x,y τις (i), προκύπτει

$$x=z=t \quad \text{και} \quad y=1-x-z=1-2t,$$

οπότε η ϵ έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t)=(x,y,z)=(t,1-2t,t)=(0,1,0)+t(1,-2,1).$$

Επομένως ένα σημείο της ϵ είναι το $A=(0,1,0)$ και ένα διάνυσμα παράλληλο με αυτή το $\vec{u}=(1,-2,1)$. Αντικαθιστώντας στην (i) προκύπτει

$$\vec{\beta}=(0,1,0)+\frac{4}{6}(1,-2,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Η απόσταση του P από την ϵ είναι

$$d(P,\epsilon)=|\overrightarrow{PB}|=|\vec{\beta}-\vec{p}|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άσκηση 6.51 Να δειχθεί ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα S, που έχει κέντρο το σημείο $K=(k_1,k_2,k_3)$ και ακτίνα R, στο σημείο της $A(a_1,a_2,a_3)$, έχει καρτεσιανή εξίσωση

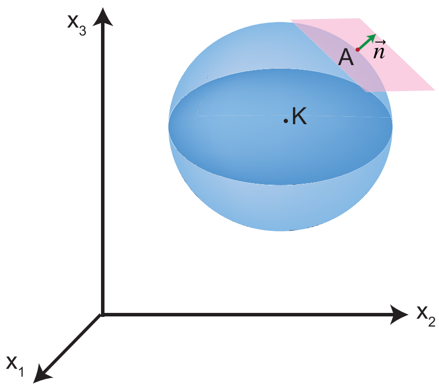
$$(a_1-k_1)(x-a_1)+(a_2-k_2)(y-a_2)+(a_3-k_3)(z-a_3)=0.$$

Λύση

Η σφαίρα S έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$f(x,y,z)=(x-k_1)^2+(y-k_2)^2+(z-k_3)^2-R^2=0, \tag{i}$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 14.4, ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο της $A(a_1,a_2,a_3)$ είναι το



Σχήμα 6.41 *Εφαπτόμενο επίπεδο σφαίρας*

$$\vec{m}=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A,\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A\right) \tag{ii}$$

Από την (i) προκύπτει

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A = 2(x-k_1)|_{x=a_1} = 2(a_1-k_1)$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A = 2(y-k_2)|_{y=a_2} = 2(a_2-k_2)$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_A = 2(z-k_3)|_{z=a_3} = 2(a_3-k_3)$$

οπότε η (ii) δίνει $\vec{m} = (2(a_1-k_1), 2(a_2-k_2), 2(a_3-k_3))$.

Επομένως, και το διάνυσμα

$$\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{m} = (a_1-k_1, a_2-k_2, a_3-k_3)$$

είναι κάθετο στην S στο σημείο A.
Έτσι το εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο $A = (a_1, a_2, a_3)$ έχει εξίσωση

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{n}\cdot\vec{r} = \vec{n}\cdot\vec{a}$$

ή $(a_1-k_1)x + (a_2-k_2)y + (a_3-k_3)z = a_1(a_1-k_1) + a_2(a_2-k_2) + a_3(a_3-k_3)$.

ή $$(a_1-k_1)(x-a_1) + (a_2-k_2)(y-a_2) + (a_3-k_3)(z-a_3) = 0.$$

Άσκηση 6.52 Να βρεθούν τα κέντρα των σφαιρών S που έχουν ακτίνα $r = 3\sqrt{14}$ και εφάπτονται του επιπέδου

$$\pi:\; 3x - y + 2z + 6 = 0$$

στο σημείο τους $A(1,9,0)$.

Λύση

Τα κέντρα K των σφαιρών S είναι σημεία της κάθετης ευθείας ϵ στο επίπεδο π στο A.
Η ϵ έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{n}, \quad t \in R, \tag{i}$$

όπου $\vec{a} = (1,9,0)$ το διάνυσμα θέσης του A και $\vec{n}$ ένα διάνυσμα κάθετο στο π. Από την εξίσωση του π προκύπτει ότι ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $\vec{n} = (3,-1,2)$, οπότε η (i) γίνεται

$$\vec{r}(t) = (1,9,0) + t(3,-1,2) = (1+3t, 9-t, 2t), \quad t \in R.$$

Επειδή το K είναι σημείο της ευθείας (ϵ), το διάνυσμα θέσης του $\vec{u}$ δίνεται από τη σχέση αυτή για κάποια τιμή της t, την οποία αρκεί να βρούμε

$$\vec{u} = (1+3t, 9-t, 2t), \quad t \in R, \tag{ii}$$

Επειδή το K είναι το κέντρο της σφαίρας S, η απόστασή του από το σημείο επαφής A της S με το επίπεδο π είναι ίση με την ακτίνα r,

$$(AK) = r \quad \text{ή} \quad |\overrightarrow{AK}|^2 = r^2. \tag{iii}$$

$$\overrightarrow{AK} = \vec{u} - \vec{a} = (1+3t-1, 9-t-9, 2t-0) = (3t, -t, 2t),$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$(3t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = \left(3\sqrt{14}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; 14t^2 = 14\cdot 3^2 t_{1,2} = \pm 3.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (ii) προκύπτει ότι τα κέντρα των ζητούμενων σφαιρών είναι τα σημεία

$$K_1 = (10,6,6) \;\text{ και }\; K_2 = (-8,12,-6).$$

Άσκηση 6.53 Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $A(0,-1,2)$ της επιφάνειας S με καρτεσιανή εξίσωση

$$x^2+4y^2-z^2-2x+4y+6z-8=0$$

Λύση

Ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο A είναι το (βλ. Παρατήρηση 14.4)

$$\vec{m}=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A,\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A\right),$$

όπου
$$f(x,y,z)=x^2+4y^2-z^2-2x+4y+6z-8.$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A &= 2x-2|_{x=0}=-2\\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A &= 8y+4|_{y=-1}=-4\\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A &= -2z+6|_{z=2}=2,\end{aligned}$$

οπότε το διάνυσμα $\vec{m}=(-2,-4,2)$, άρα και το $\vec{n}=-\frac{1}{2}\vec{m}=(1,2,-1)$, είναι κάθετο στην S στο A. Επομένως, η εξίσωση του π είναι

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=\vec{n}\cdot\vec{a}, \qquad (i)$$

όπου $\vec{a}=(0,-1,2)$ το διάνυσμα θέσης του σημείου επαφής A και $\vec{r}=(x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου (x,y,z) του π.
Η (i) γράφεται
$$(1,2,-1)\cdot(x,y,z)=(1,2,-1)\cdot(0,-1,2),$$

οπότε το π έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$x+2y-z=-4.$$

Άσκηση 6.54 Να βρεθεί καρτεσιανή εξίσωση της σφαίρας που είναι ομόκεντρη με τη σφαίρα

$$S:\ x^2+y^2+z^2-4x+6y+8=0 \qquad (i)$$

και εφάπτεται του επιπέδου

$$\pi:\ x+2y-3z-1=0.$$

Λύση
Η (i) γράφεται (βλ. παράδ. 6.42)

$$x^2-2\cdot 2x+2^2+y^2+2\cdot 3y+3^2+z^2=-8+2^2+3^2$$

ή
$$(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=5.$$

Επομένως η σφαίρα S έχει κέντρο το σημείο $K(2,-3,0)$ και ακτίνα $R=\sqrt{5}$.
Η ζητούμενη σφαίρα S', που είναι ομόκεντρη με την S, έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται του επιπέδου π. Επομένως, η ακτίνα της R' είναι ίση με την απόσταση του κέντρου της K από το επίπεδο π, η οποία, σύμφωνα με το παράδ. 6.;, είναι

$$r'=d(K,\pi)=\frac{|1\cdot 2+2(-3)-3\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης σφαίρας είναι

$$(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=\left(\frac{5}{\sqrt{14}}\right)^2=\frac{25}{14}.$$

Κεφάλαιο 7

Διανυσματικοί χώροι

Άσκηση 7.1 Να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ αν

$$\begin{aligned} 3(\vec{x}-\vec{a})+2(\vec{y}-\vec{\beta}) &= \vec{\gamma} && (ii) \\ 2(\vec{x}+\vec{a})-(\vec{y}+\vec{\beta}) &= \vec{\delta}. && (iii) \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε ιδιότητες διανυσματικών χώρων.
Πολλαπλασιάζοντας την (iii) επί δύο και προσθέτοντας κατά μέλη με την (ii), προκύπτει

$$3\vec{x}-3\vec{a}+2\vec{y}-2\vec{\beta}+4\vec{x}+4\vec{a}-2\vec{y}-2\vec{\beta}=\vec{\gamma}+2\vec{\delta},$$

ή

$$7\vec{x}=-\vec{a}+4\vec{\beta}+\vec{\gamma}+2\vec{\delta},$$

οπότε

$$\vec{x}=\frac{1}{7}\left(-\vec{a}+4\vec{\beta}+\vec{\gamma}+2\vec{\delta}\right)=-\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{\beta}+\frac{1}{7}\vec{\gamma}+\frac{2}{7}\vec{\delta}.$$

Έτσι, η (iii) δίνει

$$\begin{aligned} \vec{y} &= 2\vec{x}+2\vec{a}-\vec{\beta}-\vec{\delta} \\ &= 2\left(-\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{\beta}+\frac{1}{7}\vec{\gamma}+\frac{2}{7}\vec{\delta}\right)+2\vec{a}-\vec{\beta}-\vec{\delta} \end{aligned}$$

ή

$$\vec{y}=\frac{12}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{\beta}+\frac{2}{7}\vec{\gamma}-\frac{3}{7}\vec{\delta}.$$

Άσκηση 7.2 Να δειχθεί ότι

$$span\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4,\vec{v}_5,\vec{v}_6\right)=R^5$$

όπου

$$v_1=(1,0,0,1,0),\vec{v}_2=(0,1,0,0,0),\vec{v}_3=(0,0,1,-1,0),\vec{v}_4=(0,0,0,0,1),$$
$$\vec{v}_5=(1,0,0,0,-1),\vec{v}_6=(0,1,1,1,0).$$

Λύση

Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4,\vec{v}_5,\vec{v}_6$ είναι

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μεγαλύτερη διάσταση τετραγωνικού υποπίνακα του P είναι 5. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του υποπίνακα του P, που προκύπτει αν παραλείψουμε την τελευταία στήλη του,

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας τέλος το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1 \neq 0,$$

οπότε
$$rank(P) = 5.$$
Επομένως,
$$span\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6) = R^5.$$

Άσκηση 7.3 Για ποιες τιμές των k, λ τα διανύσματα

$$\vec{\epsilon}_1 = (1,0,1,0), \vec{\epsilon}_2 = (0,1,0,1), \vec{\epsilon}_3 = (k,1,0,0), \vec{\epsilon}_4 = (0,0,\lambda,0).$$

αποτελούν μία βάση του R^4;

Λύση

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν μία βάση του R^4 αν

$$detA = 0$$

όπου
$$A = [\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4]$$

ο πίνακας των $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4$

$$detA = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1\lambda \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ και $\vec{\epsilon}_4$ αποτελούν μία βάση του R^4 αν και μόνο αν $\lambda \neq 0$.

Άσκηση 7.4 Για τους διανυσματικούς υποχώρους του R^3

$$U = \{(x,y,z):\ 2x + y - z = 0\} \text{ και } V = \{(x,y,z):\ x - y = 0\}$$

α) Να βρεθούν η διάσταση και μια βάση των:
$i)\,U,\quad ii)\ V\quad$ και $\quad iii)\ U \cap V.$
β) Να βρεθούν συμπληρωματικοί των διανυσματικών υποχώρων:
$i)\,U,\quad ii)\,U \cap V.$

Λύση

α) $i)$ Ο U γράφεται

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z):\ 2x+y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z):\ z=2x+y\} \\ &= \{(x,y,2x+y),\quad x,y\in R\} \\ &= \{x(1,0,2)+y(0,1,1),\quad x,y\in R\} \\ &= span\left[(1,0,2),(0,1,1)\right] \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,0,2), \vec{u}_2=(0,1,1)$ είναι προφανώς μη παράλληλα, οπότε και γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα,

$$dim(U)=2,$$

και μια βάση του V είναι τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

$ii)$ Ο V γράφεται

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z):\ x-y=0\} \\ &= \{(x,x,z),\quad x,y\in R\} \\ &= \{x(1,1,0)+z(0,0,1),\quad x,z\in R\} \\ &= span\left[(1,0,0),(0,0,1)\right] \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $(1,0,0),(0,0,1)$ είναι προφανώς μη παράλληλα, οπότε και γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα,

$$dim(V)=2,$$

και μια βάση του είναι τα διανύσματα $(1,0,0),(0,0,1)$.

$iii)$ Αν $\vec{u}\in(U\cap V)$,

$$\vec{u}\in A \text{ και } \vec{u}\in B,$$

οπότε

$$\vec{u}=k(1,0,2)+l(0,1,1) \text{ και } \vec{u}=m(1,0,0)+n(0,0,1),$$

Επομένως

$$k(1,0,2)+l(0,1,1)u=m(1,0,0)+n(0,0,1)$$

ή

$$(k,l,2k+l)=(m,0,n)$$

ή

$$k=m,\quad l=0,\quad 2k+l=n.$$

Από το σύστημα αυτό εύκολα προκύπτει ότι

$$m=k,\quad l=0,\quad n=2k$$

οπότε

$$\vec{u}=(k,0,2k)=k(1,0,2),\quad k\in R.$$

Επομένως,

$$U\cap V=\{k(1,0,2),\ k\in R\}=span(1,0,2).$$

Άρα,

$$dim(U\cap V)=1$$

και μία βάση του $U\cap V$ είναι το διάνυσμα $(1,0,2)$.

β) $i)$ Επεκτείνουμε την βάση $\vec{u}_1=(1,0,2), \vec{u}_2=(0,1,1)$ του U σε βάση του R^3 προσθέτοντας το διάνυσμα $\vec{u}_3=(1,0,0)$.

Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

οπότε τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.
Άρα, ένας συμπληρωματικός του διανυσματικού υποχώρου U είναι ο

$$U' = span(\vec{u}_3) = span(1,0,0).$$

$ii)$ Επεκτείνουμε τη βάση $\vec{a}_1 = (1,0,2)$ του $U \cap V$ σε βάση του R^3 προσθέτοντας τα διανύσματα $\vec{a}_2 = (0,1,0)$ και $\vec{a}_3 = (0,0,1)$.
Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.
Άρα, ένας συμπληρωματικός του διανυσματικού υποχώρου $U \cap V$ είναι ο

$$(U \cap V)' = span(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = span\left[(0,1,0),(0,0,1)\right].$$

Άσκηση 7.5 Να δειχθεί ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 και να βρεθεί η διάσταση και μία βάση του.

Λύση

Θέτοντας $z = k$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x - 4y &= -3k \\ x + 3y &= 2k \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει

$$3y - (-4y) = 2k - (-3k) \Leftrightarrow 7y = 5k \Leftrightarrow y = \frac{5k}{7}$$

οπότε

$$x = 4y - 3k = 4\frac{5k}{7} - 3k = -\frac{1}{7}k$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο

$$A = \{(x,y,z) : \ x = -\frac{1}{7}k, \ y = \frac{5}{7}k, \ z = k, \ k \in R\}$$

το οποίο είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διάστασης 1.
Μία βάση του είναι το (θέτουμε $k = 7$)

$$\vec{v}_1 = (-1,5,7)$$

***Άσκηση 7.6** Να βρεθούν για τον πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

α) Ο βαθμός του.
β) Μια βάση του πυρήνα του $ker(A)$.
γ) Μια βάση του διανυσματικού χώρου V_1 που παράγεται από τα διανύσματα-στήλες του A.
δ) Μια βάση του διανυσματικού χώρου V_2 που παράγεται από τα διανύσματα-γραμμές του A.

Λύση

α) Όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A προκύπτουν 0 και υπάρχει μη μηδενική υποορίζουσα δεύτερης τάξης, π.χ. η

$$\lambda \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 2$$

β) Ο πυρήνας της A είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R$ (αφού ο A είναι πίνακας μίας γραμμικής απεικόνισης $f : R^4 \to R^3$) με

$$A\vec{v} = 0$$

Επειδή $rank(A) = 2$, για να λύσουμε το ομογενές αυτό σύστημα, βρίσκουμε τους δύο αγνώστους (π.χ τους x_3 και x_4 που αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα ουτ A) συναρτήσει των άλλων δύο.
Θεωρούμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4x_4 + 2x_3 - 6x_4 &= 0 \\ x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημά τους. Η δεύτερη γράφεται

$$x_3 = -5x_4$$

παίρνουμε

$$2(-5x_4) - 6x_4 = 2x_1 + 4x_2 \Leftrightarrow -16x_4 = 2x_1 + 4x_2 \Leftrightarrow x_4 = -\frac{1}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

και

$$x_3 = -5x_4 = -5\left(-\frac{1}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_2\right) = \frac{5}{8}x_1 + \frac{5}{4}x_2$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} ker(A) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, \frac{5}{8}x_1 + \frac{5}{4}x_2, -\frac{1}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_2), \ x_1, x_2 \in R \\ &= \{ x_1(1, 0, \frac{5}{8}, -\frac{1}{8}) + x_2(0, 1, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}), \ x_1, x_2 \in R \\ &= span\left\{(1, 0, \frac{5}{8}, -\frac{1}{8}), (0, 1, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4})\right\} \end{aligned}$$

οπότε μία βάση του $ker(A)$ είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = \left(1, 0, \frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = \left(0, 1, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

γ) Αφού $rank(A) = 2$, δύο από τα διανύσματα στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου. Μία τέτοια βάση είναι τα διανύσματα της τρίτης και τέταρτης στήλης του A

$$\vec{v}_3 = (-1, 2, 1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_4 = (3, -6, 5)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα του πίνακα A.
δ) Θεωρώντας τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 3), \quad \vec{u}_2 = (-2, -4, 2, -6) \quad \text{και} \quad \vec{u}_3 = (0, 0, 1, 5)$$

των γραμμών του A, ο πίνακάς τους είναι

$$B = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = A^T$$

Επειδή, σύμφωνα με τον Ορισμό του βαθμού πίνακα,

$$rank(A^T) = rank(A) = 2,$$

η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι 2 και μία βάση του είναι τα διανύσματα $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ που αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα B.

Άσκηση 7.7 *Να εξεταστεί αν τα σύνολα $A = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\}$ και $V = \{(x, y, z) : y = x^3\}$ είναι διανυσματικοί υποχώροι του R^3 και αν είναι να βρεθούν συμπληρωματικοί υποχώροι τους.*

Λύση

Για κάθε $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ του A ισχύει

$$z_1 = x_1 - y_1 \quad \text{και} \quad z_2 = x_2 - y_2$$

οπότε

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 - (y_2 + y_1))\\ &= (x, y, x - y), \quad x, y \in R\end{aligned}$$

Άρα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in A$

Επίσης, για κάθε $\lambda \in R$ και $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ του A ισχύει

$$\begin{aligned}\lambda\vec{v}_1 &= \lambda(x_1, y_1, x_1 - y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1)\\ &= (x, y, x - y), \quad x, y \in R\end{aligned}$$

οπότε $\lambda\vec{v}_1 \in A$

Επομένως, το A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3.
Ο A γράφεται

$$\begin{aligned}A &= \{(x, y, x - y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1), \quad x, y \in R\\ &= span\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}\end{aligned}$$

οπότε $dim(A) = 2$

και μία βάση του είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (0, 1, -1)$$

Θεωρώντας το διάνυσμα $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$ η ορίζουσα του πίνακα B των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ αποτελούν μία βάση του R^3.
Επομένως, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του A είναι ο

$$A' = span\vec{v}_3 = \{k(1, 0, 0) = (k, 0, 0), \quad k \in R\}$$

Ο V δεν είναι διανυσματικός υποχώρος, διότι υπάρχουν

$$\vec{v}_1 = (x_1, x_1^3, z_1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (x_2, x_2^3, z_2)$$

με $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, x_1^3 + x_2^3, z_1 + z_2)$

όπου $x_1^3 + x_2^3 \neq (x_1 + x_2)^3$

οπότε, υπάρχουν $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ με $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \notin V$.

Άσκηση 7.10 Ο διανυσματικός υποχώρος U του R^4 παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1, -2, 3, -1), \vec{u}_2 = (2, -1, 4, 5)$$

και ο V από τα

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 2, 3), \vec{v}_2 = (4, -2, 9, 7), \vec{v}_3 = (5, -1, 11, 10).$$

Να βρεθούν:
α) Η διάσταση και μια βάση του $U + V$.
β) Η διάσταση του $U \cap V$.
γ) Αν το $U + W$ είναι ευθύ άθροισμα.
δ) Μια βάση του διανυσματικού υποχώρου $U \cap V$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι

$$v_3 = v_1 + v_2$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι μη παράλληλα (διότι $\vec{v}_1 \neq k\vec{v}_2, k \in R$), άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του V και

$$V = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Επίσης τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διότι $\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2, k \in R$), οπότε

$$U = span(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

Επομένως

$$dim(U + V) = rank(A),$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$.
Επειδή

$$|A| = 0 \text{ και } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

$$rank(A) = 3,$$

οπότε

$$dim(U + V) = 3$$

και μια βάση του $U + V$ είναι τα διανύσματα (αντιστοιχούν στην παραπάνω μη μηδενική ορίζουσα).

$$\vec{u}_1 = (1, -2, 3, -1),\ \vec{u}_2 = (2, -1, 4, 5),\ \vec{v}_1 = (1, 1, 2, 3).$$

β) Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει ότι

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

γ) Το $U + V$ δεν είναι ευθύ άθροισμα, διότι $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$ (αφού $dim(U \cap V) \neq 0$).
δ) Αν $\vec{a} \in (U \cap V)$,

$$\vec{a} \in U \text{ και } \vec{a} \in V,$$

οπότε

$$\vec{a} = k\vec{u}_1 + l\vec{u}_2 \text{ και } \vec{u} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2,$$

ή $$k(1, -2, 3, -1) + l(2, -1, 4, 5)u = m(1, 1, 2, 3) + n(4, -2, 9, 7)$$

ή $$(k + 2l, -2k - l, 3k + 4l, -k + 5l) = (m + 4n, m - 2n, 2m + 9n, 3m + 7n)$$

οπότε

$$\begin{aligned} k + 2l &= m + 4n \\ -2k - l &= m - 2n \\ 3k + 4l &= 2m + 9n \\ -k + 5l &= 3m + 7n \end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} k + 2l - m - 4n &= 0 \\ -2k - l - m + 2n &= 0 \\ 3k + 4l - 2m - 9n &= 0 \\ -k + 5l - 3m - 7n &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & -9 \\ -1 & 5 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

έχει ορίζουσα $|A| = 0$ και

$$rank(A) = 3$$

οπότε βρίσκουμε, σύμφωνα με την πρότ. 3.15 και 3.13, τους τρεις αγνώστους (π.χ k, l, m) συναρτήσει του τετάρτου (n),

$$k = n, \quad l = n, \quad m = -n.$$

Επομένως,

$$U \cap V = \{(n, n, -n, n)\} = \{n(1, 1, -1, 1),\ n \in R\} = span(1, 1, -1, 1).$$

Άσκηση 7.11 Για τους διανυσματικούς υποχώρους του R^4

$$\begin{aligned} V_1 &= [(2,3,1,1), (-1,2,3,-1), (0,7,7,-1)] \\ V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \end{aligned}$$

α) Να δειχθεί ότι ο V_1 είναι υποχώρος του V_2.
β) Να βρεθεί ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του V_1.

Λύση

α) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι 2, διότι όλες οι 3×3 υποορίζουσές του είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική 2×2 υποορίζουσα, οπότε

$$dim(V_1) = 2$$

και

$$V_1 = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = span\,[(2,3,1,1), (-1,2,3,-1)].$$

Επίσης

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 - x_3\} \\ &= \{(x_2 - x_3, x_2, x_3, x_4),\ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\} \\ &= \{x_2(1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,0,0,1),\ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\} \\ &= span\,[(1,1,0,0),\ (-1,0,1,0),\ (0,0,0,1)] \end{aligned}$$

Για να είναι $V_1 \subseteq V_2$ πρέπει

$$\vec{v}_1 \in V_2 \ \text{ και } \ \vec{v}_2 \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (2,3,1,1) = k(1,1,0,0) + \lambda(-1,0,1,0) + m(0,0,0,1) \\ &\Leftrightarrow \quad (k - \lambda, k, \lambda, m) = (2,3,1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad k - \lambda = 2,\ k = 3,\ \lambda = 1,\ m = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 3,\ \lambda = 1,\ m = 1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{v}_1 \in V_2.$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (-1,2,3,-1) = k(1,1,0,0) + \lambda(-1,0,1,0) + m(0,0,0,1)\\ &\Leftrightarrow \quad (k-\lambda, k, \lambda, m) = (-1,2,3,-1)\\ &\Leftrightarrow \quad k-\lambda = -1,\ k = 2,\ \lambda = 3,\ m = -1\\ &\Leftrightarrow \quad k = 2,\ \lambda = 3,\ m = -1\end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{v}_2 \in V_2.$$

Επομένως

$$V_1 \subseteq V_2.$$

β) Επεκτείνουμε την βάση $\vec{v}_1 = (2,3,1,1), \vec{v}_2 = (-1,2,3,-1)$ του V_1 σε βάση του R^4 προσθέτοντας τα διανύσματα

$$\vec{v}_4 = (1,0,0,0) \ \text{ και } \ \vec{v}_5 = (0,1,0,0).$$

Η ορίζουσα του πίνακα των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^4. Επομένως, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του V_1 είναι ο

$$V_1' = span(\vec{v}_4, \vec{v}_5) = span\left[(1,0,0,0),\ (0,1,0,0)\right].$$

Άσκηση 7.13 Έστω ο διανυσματικός υποχώρος του R^4

$$V = \left[(1,1,3,2), (-1,3,1,2), (1,-4,-2,-3)\right].$$

α) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα k, l, m ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (0,k,l,m)$ να ανήκει στον V.
β) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$U = \{(0,k,l,m),\ k,l,m \in R\}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του R^4 και να βρεθεί μια βάση του.

Λύση
α) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -4\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι 2, διότι όλες οι 3×3 ορίζουσές του είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική 2×2 υποορίζουσα, οπότε

$$dim(V) = 2$$

και

$$V = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = span\left[(1,1,3,2), (-1,3,1,2)\right].$$

Για να είναι $\vec{u} \in V$ πρέπει

$$\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2, \quad x, y \in R$$

ή
$$(0,k,l,m) = x(1,1,3,2) + y(-1,3,1,2)$$

ή
$$(0,k,l,m) = (x-y, x+3y, 3x+y, 2x+2y).$$

Πρέπει λοιπόν να έχει λύση ως προς x, y το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x - y &= 0\\
x + 3y &= k\\
3x + y &= l\\
2x + 2y &= m
\end{aligned}
$$

Ο πίνακας του συστήματος αυτού είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & l \\ 2 & 2 & m \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$rank(A) = 2$$

πρέπει

$$rank(A|B) = 2$$

οπότε πρέπει όλες οι 3×3 υποορίζουσες του $A|B$ να είναι μηδέν, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & l \end{vmatrix}\\
&= 1\begin{vmatrix} 3 & k \\ 1 & l \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & k \\ 3 & l \end{vmatrix}\\
&= -4k + 4l = 0\\
&\Leftrightarrow l = k\\
A_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix}\\
&= 1\begin{vmatrix} 3 & k \\ 2 & m \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & m \end{vmatrix}\\
&= 4m - 4k = 0\\
&\Leftrightarrow m = k
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & l \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 4m - 4l = 0 \\
&\Leftrightarrow m = l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & l \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -8m + 4l + 4k = 0
\end{aligned}$$

Οι τρείς πρώτες εξισώσεις δίνουν

$$m = l = k$$

και η τέταρτη αληθεύει για τις τιμές αυτές, οπότε οι ζητούμενες συνθήκες είναι

$$m = l = k$$

β) Το σύνολο

$$U = \{(0,k,l,m)\} = \{(0,k,k,k), \quad k \in R\} = span(0,1,1,1)$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του R^4 και μια βάση του είναι το διάνυσμα $(0,1,1,1)$.

Άσκηση 7.14 *Δίνονται οι διανυσματικοί υποχώροι του R^4*

$$U_1 = \{(x,y,z) : x + y + z = 0\} \;\; \text{και} \;\; U_2 = \{(x,y,z) : x = y = \frac{z}{m}, \; m \neq 0\}.$$

α) Να βρεθεί μία βάση για καθένα από τους υποχώρους

$$U_1, U_2, U_1 \cap U_2 \quad \text{και} \quad U_1 + U_2.$$

β) Πότε ισχύει $U_1 \oplus U_2 = R^3$;

Λύση

α) Ο U_1 γράφεται

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y,z) : z = -x - y\} = \{(x,y,-x-y), \;\; x,y \in R\} \\
&= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1), \;\; x,y \in R\} \\
&= span\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}
\end{aligned}$$

οπότε $$dim(U_1) = 2$$

και μία βάση του U_1 είναι τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1,0,-1) \quad \text{και} \quad \vec{u}_2 = (0,1,-1)$$

Ο U_2 γράφεται

$$\begin{aligned}
U_2 &= \left\{(\frac{z}{m},\frac{z}{m},z), \;\; z \in R\right\} = \left\{\frac{z}{m}(1,1,m), \;\; z \in R\right\} \\
&= span\{(1,1,m)\}
\end{aligned}$$

οπότε $$dim(U_2) = 1$$

και μία βάση του U_2 είναι το διάνυσμα

$$\vec{u}_3 = (1, 1, m)$$

Έστω $\vec{u} \in U_1 \cup U_2$, οπότε

$$\vec{u} \in U_1 \quad \text{και} \quad \vec{u} \in U_2$$

Έτσι,

$$\vec{u} = k(1, 0, -1) + \lambda(0, 1, -1)$$

και

$$\vec{u} = p(1, 1, m)$$

οπότε

$$k(1, 0, -1) + \lambda(0, 1, -1) = p(1, 1, m)$$

ή

$$(k, \lambda, -k - \lambda) = (p, p, pm)$$

Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} k &= p \\ \lambda &= p \\ -k - \lambda &= pm \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας από τις δύο πρώτες εξισώσεις στην τρίτη παίρνουμε

$$-p - p = pm \Leftrightarrow p(m + 2) = 0$$

Η σχέση αυτή για $m \neq -2$ αληθεύει για $p = 0$, αλλά τότε

$$k = \lambda = 0$$

οπότε στην περίπτωση αυτή $\vec{u} = 0$ και

$$U_1 \cap U_2 = \vec{0}$$

Αν $m = -2$, το σύστημα ως προς k, λ και p έχει τις λύσεις

$$K = p, \ \lambda = p, \ \ p \in R$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ($m = -2$).

$$U_1 \cap U_2 = span(\vec{u}_3) = span(1, 1, -2)$$

Υπολογίζουμε τον βαθμό του πίνακα B των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$,

$$B = [\vec{u}_1 \ \ \vec{u}_2 \ \ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του B είναι

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 1 + 1 = m + 2$$

Άρα, αν $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

$$det(B) \neq 0$$

και

$$rank(B) = 3$$

οπότε στην περίπτωση αυτή τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μία βάση του R^3.

Επομένως, αν $m \neq -2$,

$$U_1 + U_2 = R^3$$

Δείξαμε επίσης ότι

$$U_1 \cap U_2 = \vec{0}$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ($m \neq -2$) το άθροισμα $U_1 + U_2$ είναι ευθύ,

$$U_1 \oplus U_2 = R^3$$

Στην περίπτωση $m = -2$,

$$rank(B) = 2,$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

$$rank(U_1 + U_2) = rank(B) = 2$$

Στην περίπτωση αυτή ($m = -2$) μία βάση του $U_1 + U_2$ είναι τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).
Επομένως, για $m = -2$,

$$U_1 + U_2 = U_1$$

β) Σύμφωνα με το (α),

$$U_1 \oplus U_2 = R^3$$

αν και μόνο αν $m \neq -2$

Άσκηση 7.15 Να εξεταστεί αν:
α) Ο διανυσματικός υποχώρος V_1 του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{a} = (3, -1, 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, -1, 0, 2)$ είναι υποσύνολο του διανυσματικού υποχώρου V_2 που παράγεται από τα $\vec{\gamma} = (2, -1, 2, 0)$ και $\vec{\delta} = (1, 0, -1, 1)$.
β) $V_1 = V_2$.

Λύση
α) Για να είναι $V_1 \subseteq V_2$ πρέπει

$$\vec{a} \in V_2 \text{ και } \vec{\beta} \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (3, -1, 1, 1) = k(2, -1, 2, 0) + \lambda(1, 0, -1, 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (2k + \lambda, -k, 2k - \lambda, \lambda) = (3, -1, 1, 1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2k + \lambda = 3,\ -k = -1,\ 2k - \lambda = 1,\ \lambda = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 1,\ \lambda = 1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{a} \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (4, -1, 0, 2) = k(2, -1, 2, 0) + \lambda(1, 0, -1, 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (2k + \lambda, -k, 2k - \lambda, \lambda) = (4, -1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \quad 2k + \lambda = 4,\ -k = -1,\ 2k - \lambda = 0,\ \lambda = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 1,\ \lambda = 2 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{\beta} \in V_2.$$

Επομένως

$$V_1 \subseteq V_2.$$

β) Επειδή ο V_1 είναι διανυσματικός υποχώρος του $V2$ και

$$dim(V_1) = dim(V_2),$$

ισχύει

$$V_1 = V_2.$$

Άσκηση 7.16 Δίνεται ο διανυσματικός υποχώρος V_1 του R^3 που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{a} = (5,3,8)$ και $\vec{\beta} = (1,3,4)$ και ο υποχώρος V_2 που παράγεται από τα $\vec{\gamma} = (2,-1,2)$ και $\vec{\delta} = (0,-1,1)$.
α) Να εξεταστεί αν:

$i)\, R^3 = V_1 + V_2, \qquad ii) R^3 = V_1 \oplus V_2.$

β) Να βρεθούν συμπληρωματικοί διανυσματικοί υποχώροι των:
$i)\, V_1, \quad ii)\, V_2.$

Λύση
α) $i)$

$$V_1 + V_2 = span(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}).$$

Ο πίνακας των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$

$$A = [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει βαθμό 3, διότι υπάρχει μη μηδενική 3×3 υποορίζουσα του, π.χ των τριών πρώτων στηλών ($det\left([\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]\right) \neq 0$), οπότε

$$dim(V_1 + V_2) = rank(A) = 3,$$

Επομένως,

$$V_1 + V_2 = R^3.$$

$ii)$ Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει

$$dim(V_1 \cap V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 3 = 1,$$

οπότε το άθροισμα των V_1, V_2 δεν είναι ευθύ.
β) $i)$ Επειδή τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι βάση του R^3, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του $V_1 = span(\vec{a}, \vec{\beta})$ είναι ο

$$V_1' = span(\vec{\gamma}) = span(2,-1,2).$$

$ii)$ Θεωρώντας $\vec{\epsilon} = (1,0,0)$,

$$det\left([\vec{\gamma}, \vec{\delta}, \vec{\epsilon}]\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}, \vec{\epsilon}$ είναι βάση του R^3. Επομένως, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του $V_3 = span(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$ είναι ο

$$V_2' = span(\vec{\epsilon}) = span(1,0,0).$$

Άσκηση 7.17 Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ μια βάση του R^3 και

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{e}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{e}_3 &= -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{aligned}$$

α) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι μια βάση του R^3.
β) Να βρεθούν τα διανύσματα του R^3 που έχουν ίδιες συντεταγμένες ως προς τις δύο βάσεις.

Λύση
α) Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ως προς την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

οπότε τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.
β) Ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ στην $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι ο P, οπότε για τα διανύσματα (x_1, x_2, x_3) του R^3 που έχουν ίδιες συντεταγμένες ως προς τις δύο βάσεις ισχύει

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ή
$$(I - P) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή
$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο έχει τις λύσεις

$$x_1 = x_2 = x_3$$

Άρα τα διανύσματα του R^3 που έχουν ίδιες συντεταγμένες ως προς τις δύο βάσεις είναι τα

$$\{(k, k, k),\ k \in R\} = span(1, 1, 1).$$

Άσκηση 7.18 Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} (a-1)x + (a-1)y &= 1 - a \\ ay + az &= 2(a-1) \\ (a^2 - a)x + (a^2 - a)z &= 0 \end{aligned}$$

α) Να βρεθεί το σύνολο λύσεων A του συστήματος.
β) Στην περίπτωση που το Α έχει άπειρα στοιχεία να δειχτεί ότι είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 και να βρεθεί μια βάση του.

Λύση

α) Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος αυτού είναι (ανάπτυγμα ως προς την τρίτη γραμμή της)

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a-1 & a-1 & 0 \\ 0 & a & a \\ a^2-a & 0 & a^2-a \end{vmatrix} \\
&= (a^2-a)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a & a \end{vmatrix} + (a^2-a)\begin{vmatrix} a-1 & a-1 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\
&= (a^2-a)a(a-1) + (a^2-a)a(a-1) \\
&= 2a^2(a-1)^2
\end{aligned}
$$

οπότε

$$|A| = 0 \iff 2a^2(a-1)^2 \iff a = 0, a = 1.$$

Επομένως:

- Για $a \neq 0$ και $a \neq 1$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ 2(a-1) & a & a \\ 0 & 0 & a^2-a \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a-1)^2 a(2-3a)}{2a^2(a-1)^2} \\
&= \frac{2-3a}{2a} \\
y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 2(a-1) & a \\ a^2-a & 0 & a^2-a \end{vmatrix} \\
&= \frac{a(a-1)^2(a-2)}{2a^2(a-1)^2} \\
&= \frac{a-2}{2a} \\
z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a-1 & a-1 & 1-a \\ 0 & a & 2(a-1) \\ a^2-a & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{a(a-1)^2(3a-2)}{2a^2(a-1)^2} \\
&= \frac{3a-2}{2a}
\end{aligned}
$$

- Για $a = 0$ το σύστημα γίνεται

$$
\begin{aligned}
-x-y &= 1 \\
0y+0z &= -2 \\
0x+0z &= 0
\end{aligned}
$$

και είναι προφανώς αδύνατο.

- Για $a = 1$ το σύστημα γίνεται

$$
\begin{aligned}
0x+0y &= 0 \\
y+z &= 0 \\
0x+0z &= 0
\end{aligned}
$$

ή

$$y = -z$$

οπότε έχει λύσεις $(x = k, z = \lambda)$

ή

$$\begin{aligned}\{(x,y,z)=(k,-\lambda,\lambda)\} &= \{k(1,0,0)+\lambda(0,-1,1),\ k,\lambda\in R\}\\ &= span\left[(1,0,0),(0,-1,1)\right]\end{aligned}$$

Άσκηση 7.19 Δίνονται τα υποσύνολα του R^3

$$A=\{(x,y,z): x-y=0,\ y-z=0\} \text{ και } B=\{(x,y,z): x+y+z=0\}.$$

α) Να δειχτεί ότι τα A και B είναι διανυσματικοί υποχώροι του R^3 και να βρεθεί η διάσταση και μια βάση καθενός εξ αυτών.
β) Να δειχθεί ότι

$$A\oplus B=R^3.$$

Λύση

α)

$$\begin{aligned}A &= \{(x,y,z):\ x-y=0,\ y-z=0\}\\ &= \{(x,y,z):\ x=y=z\}\\ &= \{(z,z,z)\}\\ &= \{k(1,1,1),\ \ k\in R\}\\ &= span(1,1,1)\end{aligned}$$

οπότε ο A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3

$$dim(A)=1$$

και μία βάση του A είναι το διάνυσμα $(1,1,1)$.

$$\begin{aligned}B &= \{(x,y,z):\ x+y+z=0\}\\ &= \{(x,y,z):\ x=-y-z\}\\ &= \{(-y-z,y,z)\}\\ &= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\ \ y,z\in R\}\\ &= span\left[(-1,1,0),\ (-1,0,1)\right],\end{aligned}$$

οπότε ο A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3.
Τα διανύσματα $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ είναι προφανώς μη παράλληλα, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$dim(B)=2$$

και μία βάση του B είναι τα διανύσματα $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$.

β)

$$A+B=span\left[(1,1,1),\ (-1,1,0),\ (-1,0,1)\right].$$

Επειδή

$$A=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

τα διανύσματα $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$dim(A+B)=rank\left[(1,1,1),\ (-1,1,0),\ (-1,0,1)\right]=3.$$

Άρα,

$$A+B=R^3.$$

Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει

$$dim(A\cap B)=dim(A)+dim(B)-dim(A+B)=2+1-3=0,$$

οπότε

$$A\cap B=\{\vec{0}\}$$

και

$$A \oplus B = R^3.$$

Άσκηση 7.20 Αν ο διανυσματικός υποχώρος V του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{a} = (1,2,3,-1),\ \vec{\beta} = (1,1,4,-2),\ \text{και}\ \vec{\gamma} = (1,4,\lambda,\mu)$$

έχει διάσταση 2:
α) Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ.
β) Να βρεθεί ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του V.

Λύση
α) Για να είναι

$$dim\left[span(\vec{a},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma})\right] = 2,$$

πρέπει όλες οι 3×3 υποορίζουσες του πίνακά τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & \lambda \\ -1 & -2 & \mu \end{bmatrix}$$

να είναι μηδέν. Δηλαδή

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda + 1 = 0 \\ \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \\ |A_2| &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & \mu \end{bmatrix} \\ &= 5\mu - 5 = 0 \\ \\ &\Leftrightarrow \mu = 1 \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

οπότε

$$\lambda = 1,\ \mu = 1.$$

Επίσης,

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & \lambda \\ -1 & -2 & \mu \end{vmatrix} = 0 = \mu + \lambda - 2,$$

Για τις παραπάνω τιμές $\lambda = 1,\ \mu = 1$ ισχύει

$$|A_4| = 1 + 1 - 2 = 0,$$

οπότε οι ζητούμενες τιμές είναι

$$\lambda = 1,\ \mu = 1.$$

β) Μία βάση του V είναι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$.
Θεωρώντας τα διανύσματα

$$\vec{\delta} = (1,0,0,0), \quad \vec{\epsilon} = (0,1,0,0),$$

ισχύει

$$det(\vec{a},\vec{\beta},\vec{\delta},\vec{\epsilon}) = -2 \neq 0,$$

οπότε ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του V είναι ο

$$V' = span(\vec{\delta},\vec{\epsilon}).$$

Άσκηση 7.21 *Να δειχθεί ότι αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι παράλληλα ($\vec{a}_1 = k\vec{a}_2,\ k \in R$), τότε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{a}_3$ του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Λύση
Αν

$$B = [\vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2 \ \ \vec{a}_3] = [k\vec{a}_2 \ \ \vec{a}_2 \ \ \vec{a}_3]$$

ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$,
Αν $\vec{a}_3 || \vec{a}_2$ τότε

$$rank(B) = 1$$

ενώ αν $\vec{a}_3 \nparallel \vec{a}_2$, τότε

$$rank(B) = 2$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση

$$rank(B) < 3$$

οπότε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ για κάθε $\vec{a}_3$ ε4ίναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Άσκηση 7.22 *Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα a, β, γ ώστε το διάνυσμα (a, β, γ) του R^3 να ανήκει στον διανυσματικό υποχώρο που παράγουν τα διανύσματα*

$$\vec{u}_1 = (0,3,2), \vec{u}_2 = (-1,1,2), \vec{u}_3 = (2,1,-2).$$

Λύση
Ο βαθμός του πίνακα

$$P = [\vec{u}_1 \ \ \vec{u}_2 \ \ \vec{u}_3]$$

των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ είναι 2 διότι

$$det(P) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

και υπάρχει μη μηδενική υποορίζουσα τάξης 2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Επομένως, ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ είναι ο

$$V = span(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = span\{(0,3,2), (-1,1,2)\}$$

αφού τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα). Το διάνυσμα $\vec{v}(a, \beta, \gamma)$ ανήκει στον V αν υπάρχουν $k, m \in R$ με

$$\begin{aligned} \vec{v} = k\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a,\beta,\gamma) = k(0,3,2) + m(-1,1,2) \\ &\Leftrightarrow \quad (a,\beta,\gamma) = (-m, 3k+m, 2k+2m) \end{aligned}$$

δηλαδή αν

$$\begin{aligned} -m &= a \\ 3k+m &= \beta \\ 2k+2m &= \gamma \end{aligned}$$

Αυτό είναι σύστημα ως προς k και m με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

του οποίου ο βαθμός είναι

$$rank(A) = 2$$

Για να έχει λύση το σύστημα πρέπει και ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα να είναι 2, δηλαδή

$$rank(A|B) = 2 \Leftrightarrow rank \begin{bmatrix} 0 & -1 & a \\ 3 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{bmatrix} = 2$$

Για να ισχύει αυτό πρέπει

$$\begin{aligned} det(A|B) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 3 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -(-1)\begin{vmatrix} 3 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3\gamma - 2\beta + a(2\cdot 3 - 1\cdot 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3\gamma - 2\beta + 4a = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, το $\vec{v} = (a, \beta, \gamma)$ ανήκει στον διανυσματικό χώρο που παράγουν τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$, αν και μόνο αν ισχύει

$$4a - 2\beta + 3\gamma = 0$$

Άσκηση 7.23 Για τους διανυσματικούς υποχώρους του R^4

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

και

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}:$$

α) Να εξεταστεί αν:

$i)$ $X + Y = R^4$ $\quad ii)$ $R^4 = X \oplus Y$.

β) Να γραφεί το διάνυσμα

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$$

στη μορφή

$$\vec{x} + \vec{y}, \quad \text{όπου } \vec{x} \in X \;\text{ και }\; \vec{y} \in Y.$$

Λύση

α)$i)$ Ο X γράφεται

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 = -x_2 - x_3 - x_4\} \\ &= \{(-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4), \;\; x_2, x_3, x_4 \in R\} \\ &= \{x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1), \;\; x_2, x_3, x_4 \in R\} \\ &= span\,[(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \end{aligned}$$

Ο βαθμός του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0, 0), \vec{v}_2 = (-1, 0, 1, 0), \vec{v}_3 = (-1, 0, 0, 1)$

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι 3, διότι υπάρχει μη μηδενική 3×3 υποορίζουσά του $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$dim(X) = 3.$$

Ο Y γράφεται

$$\begin{aligned} Y &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} \\ &= \{(x_1, x_1, x_1, x_1)\} \\ &= \{k(1,1,1,1), \ \ k \in R\} \\ &= span(1,1,1,1) \end{aligned}$$

οπότε

$$dim(Y) = 1.$$

Ο βαθμός του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ και $\vec{v}_4 = (1,1,1,1)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι 4 διότι

$$|A| = -4 \neq 0$$

οπότε

$$dim(X+Y) = rank[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4] = 4.$$

Επομένως,

$$X + Y = R^4.$$

$ii)$ Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει

$$dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y) - dim(X+Y) = 3 + 1 - 4 = 0,$$

οπότε

$$X \cap Y = \{\vec{0}\}.$$

Άρα, το άθροισμα $X + Y$ είναι ευθύ, οπότε

$$R^4 = X \oplus Y.$$

β) Λόγω του (α)

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_1 = \vec{x} + \vec{y} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{\epsilon}_1 = k\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 + n\vec{v}_4 \\ &\Leftrightarrow \quad (1,0,0,0) = k(-1,1,0,0) + \lambda(-1,0,1,0) + m(-1,0,0,1) + n(1,1,1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad (1,0,0,0) = (-k-\lambda-m+n, k+n, \lambda+n, m+n) \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -k-\lambda-m+n &= 1 \\ k+n &= 0 \\ \lambda+n &= 0 \\ m+n &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο δίνει (λύνουμε τις άλλες δύο εξισώσεις ως προς k, λ, m και αντικαθιστούμε στην πρώτη)

$$k = -n, \ \ \lambda = -n, \ \ m = -n$$

και

$$-(-n) - (-n) - (-n) + n = 1 \ \Leftrightarrow \ n = \frac{1}{4}$$

οπότε

$$k = -\frac{1}{4}, \ \ \lambda = -\frac{1}{4}, \ \ m = -\frac{1}{4}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\vec{x} &= k\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 \\ &= -\frac{1}{4}(-1,1,0,0) - \frac{1}{4}(-1,0,1,0) - \frac{1}{4}(-1,0,0,1) \\ &= \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

και

$$\vec{y} = n\vec{v}_4 = \frac{1}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Άσκηση 7.24 *Να εξεταστεί αν το σύνολο K των λύσεων του συστήματος*

$$\begin{aligned}&2x - y + z - w = 1 \\ &x - z + w = 2 \\ &5x - 2y + z - w = 4 \\ &x - y + 2z - 2w = -1\end{aligned}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του R^4.

Λύση

Το σύστημα αυτό γράφεται ως

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζοντας προκύπτει

$$det(A) = 0$$

και ότι όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι 0. Επίσης, υπάρχει μη μηδενική υποορίζουσα τάξης 2 του A, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε δύο αγνώστους π.χ τους x και y που αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα 2×2 του A συναρτήσει των άλλων δύο αγνώστων (των z και w). Γράφουμε, λοιπόν, τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος στη μορφή

$$\begin{aligned}2x - y &= 1 - z + w \\ x &= 2 + z - w\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}y &= 2x - 1 + z - w = 2(2 + z - w) - 1 + z - w \\ &= 3 + 3z - 3w\end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι το σύνολο

$$\begin{aligned}A = \{(x,y,z,w)\} = &= \{(2 + z - w, 3 + 3z - 3w, z, w), \quad z, w \in R\} \\ &= \{z(1,3,1,0) + w(-1,-3,0,1) + (2,3,0,0), \quad z, w \in R\}\end{aligned}$$

το σύνολο αυτό δεν αποτελεί διανυσματικό υποχώρο του R^4 αφού δεν ισχύει ότι το $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ανήκει στον A (λόγω του σταθερού όρου $(2,3,0,0)$).

Άσκηση 7.26 Ο διανυσματικός υποχώρος U του R^4 παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1,-1,1,a),\ \vec{u}_2 = (2,1,0,\beta),\ \vec{u}_3 = (5,-2,3,\gamma),\ \vec{u}_4 = (3,-3,3,\delta)$$

α) Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες μεταξύ των a,β,γ,δ ώστε:

$i)$ $dim(U) = 2$ $ii)$ $dim(U) = 3$.

β) Να εξεταστεί αν τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υποχώροι του R^4:

$i)$ $A = \{(a,\beta,\gamma,\delta) : dimU = 2\}$ $ii)$ $B = \{(a,\beta,\gamma,\delta) : dimU = 3\}$

και στην περίπτωση που είναι να υπολογιστεί η διάσταση και μια βάση τους.

Λύση

α) $i)$

$$dimU = 2 \text{ αν και μόνον αν } rank(A) = 2,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ a & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4$.
$rank(A) = 2$ αν και μόνον αν $|A| = 0$ και οι ορίζουσες όλων των 3×3 υποπινάκων του A είναι μηδέν. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη στήλη επί 3 και αφαιρώντας από αυτήν την τέταρτη προκύπτει

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ a & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3a-\delta & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

οπότε παίρνοντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη προκύπτει

$$\begin{aligned} |A| &= -(3a-\delta)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3a-\delta)\begin{vmatrix} 2+3 & 5 & 3 \\ 1-3 & -2 & -3 \\ 0+3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(3a-\delta)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(η ορίζουσα αυτή έχει δύο στήλες ίδιες).
Επομένως $|A| = 0$ για όλες τις τιμές των a,β,γ,δ.
Η ορίζουσα του 3×3 υποπίνακα του A (που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και την τρίτη στήλη του)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ a & \beta & \delta \end{bmatrix}$$

είναι (αφαιρούμε την τρίτη στήλη από το γινόμενο της πρώτης επί 3 και μετά παίρνουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας που προκύπτει ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης της)

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ a & \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3a-\delta & \beta & \delta \end{vmatrix} \\ &= (3a-\delta)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (3a-\delta)3 \end{aligned}$$

Επομένως για να ισχύει $|A_1| = 0$ πρέπει

$$3a - \delta = 0 \ \text{ή} \ 3a = \delta.$$

Για $3a = \delta$ η πρώτη και η τέταρτη στήλη του A είναι παράλληλα διανύσματα, οπότε οι ορίζουσες των 3×3 υποπινάκων που τις περιέχουν είναι μηδέν.
Οι υποορίζουσες του A που αντιστοιχούν στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη είναι οι

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
|A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ a & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -9a - 3\beta + 3\gamma = -3(3a + \beta - \gamma) \\
|A_4| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ a & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3a + \beta - \gamma \\
|A_5| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ a & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 6a + 2\beta - 2\gamma = 2(3a + \beta - \gamma)
\end{aligned}$$

Οι υποορίζουσες του A που αντιστοιχούν στην δεύτερη, τρίτη και τέταρτη στήλη είναι οι

$$\begin{aligned}
|A_6| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
|A_7| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = -9(\beta - \gamma + \delta) \\
|A_8| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3\beta - 3\gamma + 3\delta = 3(\beta - \gamma + \delta) \\
|A_9| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = -9\beta + 9\gamma - 9\delta = -9(\beta - \gamma + \delta)
\end{aligned}$$

Επομένως τα a, β, γ, δ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\delta &= 3a \\
3a + \beta - \gamma &= 0 \\
\beta - \gamma + \delta &= 0
\end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει

$$\delta = \gamma - \beta \ \text{ και } \ a = \frac{\gamma - \beta}{3}$$

οπότε

$$dim U = 2 \text{ αν και μόνον αν } a = \frac{\gamma - \beta}{3} \ \text{ και } \ \delta = \gamma - \beta.$$

$ii)$ Επειδή $|A| = 0$ για κάθε $a, \beta, \gamma, \delta \in R$ και υπάρχει 2×2 μη μηδενική υποορίζουσα (π.χ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$),

$$dim(U) = 3 \text{ αν και μόνον αν } dim(U) \neq 2,$$

δηλαδή

$$dim U = 3 \text{ αν και μόνον αν } a \neq \frac{\gamma - \beta}{3} \ \text{ ή } \ \delta \neq \gamma - \beta.$$

β) $i)$ Λόγω του (α),

$$\begin{aligned} A &= \{(a,\beta,\gamma,\delta):\ dimU = 2\} \\ &= \left\{(a,\beta,\gamma,\delta) = \left(\frac{\gamma-\beta}{3},\beta,\gamma,\gamma-\beta\right\}\right. \\ &= \left\{\beta\left(-\frac{1}{3},1,0,-1\right)+\gamma\left(\frac{1}{3},0,1,1\right),\quad \beta,\gamma\in R\right\} \\ &= span\left[\left(-\frac{1}{3},1,0,-1\right)+\left(\frac{1}{3},0,1,1\right)\right] \end{aligned}$$

οπότε το A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^4 διάστασης 2 και μια βάση του είναι τα διανύσματα (αφού ως μη παράλληλα, είναι γραμμικώς εξαρτημένα)

$$\left(-\frac{1}{3},1,0,-1\right),\left(\frac{1}{3},0,1,1\right).$$

(ii) Λόγω του (a),

$$B = R^4 - A.$$

Το μηδενικό διάνυσμα του R^4 ανήκει στο A ($\vec{0}\in A$ επειδή το A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^4), οπότε $\vec{0}\notin B$ (αφού $B = R^4 - A$). Επομένως, το B δεν είναι διανυσματικός υποχωρος του R^4.

Άσκηση 7.27 Να δειχθεί ότι για τους διανυσματικούς υποχώρους του R^4

$$A = span(\vec{v}_1,\vec{v}_2),\text{ όπου } \vec{v}_1 = (-1,0,1,0) \text{ και } \vec{v}_2 = (0,1,1,0)$$

και

$$B = span(\vec{v}_3,\vec{v}_4),\text{ όπου } \vec{v}_3 = (1,0,0,0) \text{ και } \vec{v}_4 = (0,0,0,1)$$

ισχύει

$$A\oplus B = R^4.$$

Λύση

Το άθροισμα των διανυσματικών υποχώρων A και B είναι το γραμμικό περίβλημα των διανυσμάτων $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$

$$A + B = span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4).$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα P των διανυσμάτων $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$ αναπτύσσοντας την ως προς τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής της.

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(P) = 4.$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$dim(A+B) = 4.$$

Επομένως,

$$A + B = R^4.$$

Ισχύει

$$dim(A\cap B) = dimA + dimB - dim(A+B) = 2+2-4 = 0,$$

οπότε

$$dim(A\cap B) = \{\vec{0}\}.$$

Επομένως,

$$A\oplus B = R^4.$$

Άσκηση 7.29 Αν $A = span\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

όπου $\vec{v}_1 = (1,0,0,1,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,1,-1,0)$

και $B = span\,(\vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6)$

όπου $\vec{v}_4 = (0,0,0,0,1), \vec{v}_5 = (1,0,0,0,-1), \vec{v}_6 = (0,1,1,1,0)$:

α) Να δειχθεί ότι $A + B = R^5$.

β) Να εξεταστεί αν $A \oplus B = R^5$.

Λύση

α) Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει 3×3 μη μηδενική υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = 3.$$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του Α και

$$dim(A) = 3.$$

Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει 3×3 μη μηδενική υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(B) = 3.$$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του Β και

$$dim(B) = 3.$$

Ισχύει

$$A + B = span\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6).$$

Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, v_2, v_3, \vec{v}_4, v_5, v_6$ είναι

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μεγαλύτερη διάσταση τετραγωνικού υποπίνακα του P είναι 5. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

του υποπίνακα του P, που προκύπτει αν παραλείψουμε την τελευταία στήλη του, ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας τέλος το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(P) = 5.$$

Επομένως

$$dim(A + B) = 5,$$

οπότε

$$A + B = R^5.$$

Ισχύει

$$dim(A \cap B) = dim(A) + dim(B) - dim(A + B) = 3 + 3 - 5 = 1,$$

οπότε το $A + B$ δεν είναι ευθύ άθροισμα.

Κεφάλαιο 8

Γραμμικές απεικονίσεις

Άσκηση 8.1 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση f του R^2 με*

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2), \quad x_1, x_2 \in R:$$

α) Το σύστημα και ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^2.

β) Ο πίνακας της ως προς τη βάση

$$\vec{\epsilon}_1 = (-1, 1) \text{ και } \vec{\epsilon}_2 = (1, -2).$$

γ) Αν η f είναι 1-1.

Λύση

α) Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

β) Ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση αυτή είναι

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη βάση αυτή είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

γ) Επειδή

$$|A| = -11 \neq 0$$

η f είναι 1-1.

Άσκηση 8.2 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση f του R^2 με*

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2), \quad x_1, x_2 \in R,$$

όπου x_1, x_2 συντεταγμένες ως προς τη βάση του R^2.

$$B = \{\vec{\epsilon}_1 = (-1, 2), \ \vec{\epsilon}_2 = (0, -1)\}$$

α) Το σύστημα και ο πίνακας της f ως προς τη βάση B του R^2.
β) Το σύστημα της f ως προς τη συνήθη βάση του R^2.

Λύση

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση αυτή είναι

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Αν A ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^2, τότε ισχύει

$$A' = P^{-1}AP \ \Leftrightarrow \ A = PA'P^{-1} \qquad (i)$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση B, ο οποίος έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της ως προς τη συνήθη βάση,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του P είναι

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -14 & -5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8.3 *α) Αν ο τύπος ως προς τη βάση $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ της γραμμικής απεικόνισης f του R^2 είναι*

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2), \quad x_1, x_2 \in R,$$

να βρεθεί ο τύπος της ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$, όπου

$$\vec{d}_1 = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 \quad \text{και} \quad \vec{d}_2 = \vec{\epsilon}_1 - \vec{\epsilon}_2.$$

β) Αν η f είναι 1-1.

Λύση

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ του R^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν P ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ στη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$ είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος της f ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$ είναι

$$f(x_1', x_2') = \left(\frac{3}{2}x_1' + \frac{3}{2}x_2', -\frac{3}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' \right), \quad x_1', x_2' \in R.$$

β) Επειδή

$$|A| = 3 \neq 0$$

η f είναι 1-1.

Άσκηση 8.4 *Να εξεταστεί αν η απεικόνιση f, που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του χώρου με διάνυσμα θέσης $\vec{v}$ το σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{v} + (2, 0, -1)$ (παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $(2, 0, -1)$, είναι γραμμική.*

Λύση

Η f δεν είναι γραμμική διότι αν $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R$, τότε

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) &= \vec{v}_1 + (2, 0, -1) + \vec{v}_2 + (2, 0, -1) \\ &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (4, 0, -2) \end{aligned}$$

και

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (2, 0, -1)$$

Επειδή,

$$f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \neq f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2),$$

η f δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 8.5 *Να βρεθεί ο τύπος, ως προς τη συνήθη βάση, της γραμμικής απεικόνισης f του R^3 της οποίας ο πίνακας ως προς τη βάση*

$$\vec{\epsilon}_1 = (0, 1, 1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (1, 0, 1) \quad \textit{και} \quad \vec{\epsilon}_3 = (1, 1, 0)$$

είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ του R^3 είναι

$$B = P^{-1}AP$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ στη συνήθη βάση.
Ο P^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από την συνήθη βάση στη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, οπότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε, σύμφωνα με την (3.15),

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$f(x_1', x_2', x_3') = \frac{1}{2}\left(7x_1' - 3x_2' + 3x_3', 3x_1' - 3x_2' + 5x_3', 6x_3'\right), \quad x_1', x_2', x_3' \in R.$$

Άσκηση 8.6 *Να βρεδεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης*

$$f : R^3 \to R^2 \quad f(x,y,z) = (x-y, x+z), \quad x, y \in R:$$

α) Ως προς τις συνήθεις βάσεις των R^3 *και* R^2.

β) Ως προς τις βάσεις $\vec{e}_1{}' = (0,1,0),\ \vec{e}_2{}' = (1,0,-1), \vec{e}_3{}' = (0,1,1)$ *του* R^3

και $\vec{\epsilon}_1{}' = (1,1), \vec{\epsilon}_2{}' = (1,0)$ *του* R^2.

Λύση

α) Ο πίνακας της f ως προς τις συνήθεις βάσεις των R^3 και R^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Ο πίνακας μετάβασης από τη συνηθισμένη του R^3 στη βάση $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ο πίνακας μετάβασης από τη συνηθισμένη βάση του R^2 στη βάση $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ είναι

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και ο αντίστροφος του είναι

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις αυτές είναι

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8.7 *Αν ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης* f *του* R^3, *ως προς τη βάση*

$$\vec{\epsilon}_1 = (1,1,0),\ \vec{\epsilon}_2 = (0,1,1),\ \vec{\epsilon}_3 = (0,0,1)$$

είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεδεί ο τύπος της f *και της γραμμικής απεικόνισης* f^2 *ως προς τη συνήδη βάση του* R^3.

β) Να βρεδεί η διάσταση και μια βάση του πυρήνα και της εικόνας της f.

γ) Να εξεταστεί αν η f *είναι 1-1.*

Λύση

α) Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ του R^3 είναι

$$B = P^{-1}AP$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ στη συνήθη βάση του R^3.
Ο P^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από την συνηθισμένη βάση στην βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, οπότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε, σύμφωνα με την την (3.15),

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$f(x_1', x_2', x_3') = \left(x_1' - x_2', x_2' + x_3', 0\right), \quad x_1', x_2', x_3' \in R.$$

Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^3 είναι

$$\begin{aligned} A_{f^2} &= B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της f^2 ως προς τη συνήθη βάση του R^3 είναι

$$f^2(x_1', x_2', x_3') = \left(x_1' - 2x_2' - x_3', x_2' + x_3', 0\right), \quad x_1', x_2', x_3' \in R.$$

β) Αν $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ένα στοιχείο του πυρήνα της f,

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (-x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, -x_1 - 3x_2 - x_3) = \vec{0},$$

οπότε προκύπτει το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

και

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$rankA = 3 - 2 = 1,$$

οπότε λύνουμε το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων ως προς το x_1, x_2, θέτοντας $k = x_3$:

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= -k \\ -x_1 - 3x_2 &= k, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$(x_1, x_2, x_3) = (-k,\ 0,\ k).$$

Οι συντεταγμένες αυτές αναφέρονται στη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, οπότε ο πυρήνας της f είναι τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -k\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + k\vec{\epsilon}_3 \\ &= -k(1,1,0) + k(0,0,1) \\ &= (-k,-k,k) \end{aligned}$$

Άρα (με συντεταγμένες ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$)

$$ker(f) = \{(-k,-k,k) = k(-1,-1,1),\ k \in R\} = span(-1,-1,1).$$

Η διάσταση της εικόνας της f είναι

$$dim(im(f)) = 3 - dim(ker(f) = 3 - 1 = 2.$$

Ο τύπος της f ως προς την συνήθη βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, 0)\ ,\quad x_1, x_2, x_3 \in R$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(-1,1,0) + x_3(0,1,0) \in R,$$

οπότε

$$im(f) = span\left[(1,0,0), (-1,1,0), (0,1,0)\right].$$

Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα, διότι η ορίζουσα του πίνακά τους

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Το πρώτο και δεύτερο διάνυσμα προφανώς δεν είναι παράλληλα, οπότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως

$$im(f) = span\left[(1,0,0), (-1,1,0)\right].$$

γ) όχι αφού $|A| = 0$.

Άσκηση 8.8 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο*

$$f(x,y,z) = (x - y, x + z, x + y - z):$$

α) η διάσταση και μία βάση της εικόνας της *β) η διάσταση του πυρήνα της*
γ) μία βάση του πυρήνα της *δ) αν είναι 1-1.*

Λύση

Ο τύπος της f γράφεται ως

$$f(x,y,z) = x(1,1,1) + y(-1,0,1) + z(0,1,-1)$$

Η ορίζουσα του πίνακα P των διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \quad \vec{v}_2 = (-1,0,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3 = (0,1,-1)$$

είναι

$$det(P) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του R^3. Επομένως,

$$dim\,(im(f)) = 3$$

και μία βάση της $im(f)$ είναι τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$.
β) Σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης

$$dim\,(ker(f)) = 3 - dim\,(im(f)) = 3 - 3 = 0$$

γ) Λόγω του (β),

$$ker(f) = \vec{0}.$$

δ) Λόγω του (γ) η f είναι $1-1$.

Άσκηση 8.9 *α) Να βρεθεί ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 + 5x_3).$$

β) Να εξεταστεί αν η f είναι 1-1.

Λύση
α) Η ορίζουσα του πίνακα Α του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

οπότε, ο πυρήνας της f είναι

$$dim(ker(f)) = 3 - dim(im(f)) = 3 - 3 = 0.$$

Άρα

$$ker(f) = \vec{0}.$$

β) Επομένως, η f είναι 1-1.

Άσκηση 8.10 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο*

$$f : R^3 \to R^3, \quad f(x,y,z) = (x + y - 2z, x - z, y + z),\ x, y, z \in R:$$

α) η διάσταση και μία βάση της εικόνας της, β) ο πυρήνας της, γ) αν είναι 1-1.

Λύση
Ο τύπος της f γράφεται ως

$$f(x,y,z) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(-2,-1,1)$$

Ο πίνακας P των διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 = (1,1,0), \quad \vec{v}_2 = (1,0,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3 = (-2,-1,1)$$

έχει ορίζουσα

$$det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του R^3. Επομένως,

$$dim\ im(f) = 3$$

και μία βάση της $im(f)$ είναι τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$.
β) Σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης

$$dim\ ker(f) = 3 - dim\ im(f) = 3 - 3 = 0$$

γ) Λόγω του (β),

$$ker(f) = \vec{0},$$

οπότε η f είναι $1-1$.

Άσκηση 8.11 *Για τη γραμμική απεικόνιση του R^3*

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_2 + x_3),\ x_1,x_2,x_3 \in R$$

να βρεθούν:
α) Ο πυρήνας.
β) Η διάσταση της εικόνας.
γ) Η εικόνα.
δ) Αν είναι 1-1.

Λύση
α) Αν $\vec{u} = (x_1,x_2,x_3)$ ένα στοιχείο του πυρήνα της f,

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3) = \vec{0}.$$

Ο πίνακας του ομογενούς αυτού συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και υπάρχει 2×2 μη μηδενική ορίζουσα του πίνακα Α, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1 \cdot 1 = -2,$$

$$rank(A) = 2,$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τους δύο αγνώστους συναρτήσει του τρίτου.
Η παραπάνω μη μηδενική 2×2 ορίζουσα αντιστοιχεί στους αγνώστους x_1 και x_2 και στην πρώτη και δεύτερη εξίσωση του συστήματος, οπότε βρίσκουμε τους x_1 και x_2 συναρτήσει του x_3 λύνοντας το σύστημα της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης αφού μεταφέρουμε τους όρους που περιέχουν x_3 στα δεύτερα μέλη των εξισώσεων

$$x_1 + x_2 = x_3$$

$$x_1 - x_2 = -x_3,$$

από το οποίο προκύπτει (προσθέτοντας κατά μέλη)

$$x_1 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = x_3.$$

ή, θέτοντας $k = x_3$,

$$\{(x_1,x_2,x_3) = (0,k,k), \quad k \in R\},$$

οπότε ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned} ker(f) &= \{(0,k,k),\ k \in R\} = \{k(0,1,1),\ k \in R\} \\ &= span(0,1,1). \end{aligned}$$

β) Από τη λύση του (α) προκύπτει ότι ο πυρήνας της f είναι διανυσματικός υποχώρος διάστασης ένα, οπότε, σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης, η διάσταση της εικόνας της f είναι

$$dim(Im(f)) = 3 - dim(ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

γ) Επειδή

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,1,2) + x_2(1,-1,-1), \quad x_1, x_2 \in R\},$$

$$im(f) = span\left[(1,1,2),(1,-1,-1)\right].$$

Τα διανύσματα $(1,1,2),(1,-1,-1)$ είναι μη παράλληλα, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε η εικόνα της f είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διάστασης δύο.
δ) Επειδή

$$dim(ker(f)) = 1 \neq 0,$$

η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 8.12 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση*

$$f : R^4 \to R^3, \quad f(x,y,z,w) = (x - y + z + w, x + 2y - z + w, 3y - 2z), \ x,y,z \in R$$

α) η διάσταση και μία βάση της εικόνας της *β) η διάσταση του πυρήνα της*
γ) μία βάση του πυρήνα της *δ) αν είναι 1-1.*

Λύση
Ο τύπος της f γράφεται ως

$$f(x,y,z,w) = x(1,1,0) + y(-1,2,3) + z(1,-1,-2) + w(1,1,0)$$

Ο πίνακας P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

των διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 = (1,1,0), \ \ \vec{v}_2 = (-1,2,3), v_3 = (1,-1,2) \quad \text{και} \quad \vec{v}_4 = (1,1,0)$$

έχει βαθμό 2

$$rank(P) = 2$$

αφού όλες οι 3×3 υποορίζουσές του είναι μηδενικές και υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 2×2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Επομένως,

$$dim\,(im(f)) = 2$$

και μία βάση της εικόνας $im(f)$ είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,1,0) \text{ και } \vec{v}_2 = (-1,2,3)$$

που αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα 2×2.
β) Σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης

$$dim\,(ker(f)) + dim\,(im(f)) = 4$$

οπότε

$$dim\,(ker(f)) = 4 - 2 = 2$$

γ) Για να βρούμε μία βάση του πυρήνα της f λύνουμε το σύστημα

$$f(x,y,z,w) = 0$$

το οποίο είναι

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 0 \\ x + 2y - z + w &= 0 \\ 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή ο βαθμός του πίνακα του συστήματος αυτού είναι 2, μπορούμε να βρούμε τους δύο αγνώστους συναρτήσει των άλλων 2, δηλαδή των z και w από τις δύο πρώτες εξισώσεις (αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα 2×2),

$$\begin{aligned} x - y &= -z - w \\ x + 2y &= z - w \end{aligned}$$

αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$2y - (-y) = z - w - (-z - w) \Leftrightarrow 3y = 2z \Leftrightarrow y = \frac{2z}{3}$$

οπότε η πρώτη δίνει

$$x = y - z - w = \frac{2z}{3} - z - w = -\frac{z}{3} - w$$

Άρα,

$$\begin{aligned} ker(f) &= \left\{\left(-\frac{z}{3} - w, \frac{2z}{3}, z, w\right), \quad z, w \in R\right\} \\ &= \left\{z\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + w(-1, 0, 0, 1) \quad z, w \in R\right\} \\ &= span\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), \ (-1, 0, 0, 1)\right\} \end{aligned}$$

Άρα, μία βάση του πυρήνα της f είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 0, 1)$$

δ) Η f δεν είναι $1 - 1$ αφού

$$dim\,(ker(f)) \neq 0$$

Άσκηση 8.13 *Για την γραμμική απεικόνιση f του R^3 με*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, \ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3, \ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3)$$

να βρεθούν:
α) Η μηδενικότητα.
β) Η διάσταση της εικόνας.
γ) Αν είναι 1-1.

Λύση

α) Ο πίνακας της f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Επειδή $|A| = 0$ και όλες οι 2×2 μη μηδενικές υποορίζουσές του είναι μηδέν,

$$rankA = 1,$$

οπότε, η μηδενικότητα της f είναι

$$null(f) = 3 - 1 = 2.$$

β) Η διάσταση της εικόνας της f είναι

$$im(f) = 3 - null(f) = 3 - 2 = 1.$$

γ) Επειδή

$$null(f) = 2 \neq 0,$$

η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 8.14 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση $T : R^2 \to R^3$, για την οποία*

$$T(-1,1) = (2,1,1) \quad \text{και} \quad T(0,-1) = (-1,0,1):$$

α) ο τύπος,
β) ο πίνακας ως προς τις συνήθεις βάσεις των R^2 και R^3,
γ) αν είναι 1-1.

Λύση
Ο πίνακας της f ως προς τη βάση

$$B = \{\vec{v}_1 = (-1,1), \vec{v}_2 = (0,-1)\}$$

του R^2 και τη συνηθισμένη βάση του R^3 είναι

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση του R^2 είναι

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει

$$A' = AP$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον P^{-1} παίρνουμε

$$A = A'P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα, ο τύπος της f στις συνήθεις βάσεις των R^2 και R^3 είναι (x, y οι συντεταγμένες ως προς τη συνήθη βάση του R^2)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ -x \\ -2x-y \end{bmatrix} \\ &= (-x+y, -x, -2x-y), \quad x, y \in R \end{aligned}$$

Άσκηση 8.16 *Για τη γραμμική απεικόνιση $T : R^3 \to R^4$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$T(x,y,z) = (2x - y + 5z,\ x - y + 7z,\ 2y + 6z, -x + y + z),\ x, y, z \in R$$

α) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας και του πυρήνα της. β) Να εξεταστεί αν είναι ένα προς ένα.

Λύση
α) Ο τύπος της T γράφεται

$$T(x,y,z) = x(2,1,0,-1) + y(-1,-1,2,1) + z(5,7,6,1), \quad x, y, z \in R$$

Ο βαθμός του πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

των διανυσμάτων του R^4

$$\vec{v}_1 = (2,1,0,-1), \quad \vec{v}_2 = (-1,-1,2,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3 = (5,7,6,1)$$

είναι

$$rank(P) = 3$$

αφού η υποορίζουσα των 3 πρώτων γραμμών του πίνακα P είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

Επομένως, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα και

$$f(x,y,z) = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

οπότε

$$dim\,(ker(f)) = 3 - 3 = 0$$

Άρα, ο πυρήνας της f είναι το $\vec{0}$.
β) Αφού $dim\,(ker(f)) = 0$, η f είναι $1-1$.

Άσκηση 8.17 *Να βρεθούν για τη γραμμική απεικόνιση T του R^3, για την οποία ισχύει*

$$T(1,1,1) = T(1,1,-1) = (0,0,0) \quad \textit{και} \quad T(-1,0,1) = (2,0,-2),$$

μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της T και να επαληθευτεί το θεώρημα διάστασης.

Λύση
Επειδή

$$T(1,1,1) = T(1,1,-1) = (0,0,0),$$

$$dim(ker(T)) = 2$$

και μια βάση του πυρήνα της T είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (1,1,-1).$$

Τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (1,1,-1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3(-1,0,1)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι η ορίζουσα του πίνακα τους είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

οπότε ο πίνακας της T είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο τύπος της T είναι

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_3, 0, -2x_3)$$

οπότε

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_3(1,0,-1) = span(1,0,-1).$$

Άρα

$$im(f) = span(1, 0, -1).$$

Επειδή

$$dim(ker(f)) + dim(im(f)) = 2 + 1 = 3 = dim(R^3),$$

το θεώρημα διάστασης ισχύει στην περίπτωση αυτή.

Άσκηση 8.27 Ο πίνακας, ως προς τις συνήθεις βάσεις του R^4 και R^3, της γραμμικής απεικόνισης $T : R^4 \to R^3$ είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & k \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & k+1 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$T(1, 0, 2, -1) = (2, 0, 4).$$

α) Να αποδειχθεί ότι $k = 1$ και να βρεθεί ο τύπος της T.
β) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της T και να επαληθευτεί το θεώρημα διάστασης.

Λύση

α) Ο τύπος της T είναι

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + z + kw, kx - y + w, x + 3y + (k+1)z + w). \qquad (i)$$

Επομένως, επειδή $T(1, 0, 2, -1) = (2, 0, 4)$,

$$(2, 0, 4) = (1 - 2 \cdot 0 + 2 + k(-1), k \cdot 1 - 0 - 1, 1 + 3 \cdot 0 + (k+1)2 - 1),$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 3 - k &= 2 \\ k - 1 &= 0 \\ 2k + 2 &= 4 \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση

$$k = 1.$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι ο τύπος της T είναι

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + z + w, x - y + w, x + 3y + 2z + w).$$

β) Ο τύπος της T γράφεται

$$\begin{aligned} T(x, y, z, w) &= x(1, 1, 1) + y(-2, -1, 3) + z(1, 0, 2) + w(1, 1, 1) \\ &= span\left[(1, 1, 1), (-2, -1, 3), (1, 0, 2), (1, 1, 1)\right] \end{aligned}$$

Τα τέσσερα αυτά διανύσματα του R^3 είναι προφανώς γραμμικώς εξαρτημένα ενώ τα τρία πρώτα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού η ορίζουσα του πίνακά τους είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Άρα

$$im(T) = R^3.$$

Αν $\vec{u} = (x, y, z, w) \in R^4$ ένα στοιχείο του πυρήνα της T,

$$T(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (x - 2y + z + w, x - y + w, x + 3y + 2z + w) = \vec{0}.$$

Προκύπτει λοιπόν το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + z + w &= 0 \\ x - y + w &= 0 \\ x + 3y + 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή η υποορίζουσα των 3 πρώτων στηλών του A είναι μη μηδενική,

$$rank(A) = 3,$$

οπότε βρίσκουμε τους τρεις αγνώστους x, y, z συναρτήσει του w λύνοντας το σύστημα ($w = k$)

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -k \\ x - y &= -k \\ x + 3y + 2z &= -k, \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει

$$(x, y, z, w) = (-k, 0, 0, k), \quad k \in R\},$$

Άρα, ο πυρήνας της T είναι

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{(-k, 0, 0, k),\ k \in R\} = \{k(-1, 0, 0, 1),\ k \in R\} \\ &= span(-1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Επειδή

$$dim(ker(T)) + dim(im(T)) = 1 + 3 = 4 = dim(R^4),$$

το θεώρημα διάστασης ισχύει στην περίπτωση αυτή.

Άσκηση 8.29 α) Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του R^3 το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x_1.
β) Να βρεθούν σε τι μετασχηματίζονται από την f:
i) Το επίπεδο

$$\pi: \ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2.$$

ii) Η ευθεία ϵ με διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = (1 + t, 2, -t).$$

Λύση

α) Αν το συμμετρικό ως προς το άξονα x_1 ενός σημείου $A(x_1, x_2, x_3)$ του R^3 είναι το $A'(x_1', x_2', x_3')$, τότε

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ x_3' &= -x_3 \end{aligned}$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

οπότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

β) i) Επειδή

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \ \Leftrightarrow \ x_3 = 2x_1 - x_2 - 2,$$

τα σημεία του επιπέδου π έχουν συντεταγμένες ($k = x_1, m = x_2$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (k, m, 2k - m - 2), \quad k, m \in R,$$

οπότε οι εικόνες τους (x_1', x_2', x_3') είναι

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \\ 2k-m-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -m \\ -2k+m+2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το συμμετρικό, ως προς τον άξονα x_1, του επιπέδου π είναι τα σημεία

$$(x_1', x_2', x_3') = (k, -m, -2k+m+2), \quad k, m \in R.$$

Απαλείφοντας τα k, m από τις σχέσεις

$$x_1' = k,\ x_2' = -m,\ x_3' = -2k+m+2$$

προκύπτει

$$k = x_1',\ m = -x_2',\ x_3' = -2x_1' + (-x_2') + 2$$

ή

$$x_3' = 2 - 2x_1' - x_2'$$

οπότε το συμμετρικό, ως προς τον άξονα x_1, του επιπέδου π είναι το επίπεδο

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

ii) Οι συντεταγμένες των εικόνων μέσω της f των σημείων

$$P(1+t, 2, -t)$$

της ϵ είναι

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 = 1+t \\ x_2' &= -x_2 = -2 \\ x_3' &= -x_3 = -(-t) = t \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις της εικόνας ϵ' της ϵ μέσω της f. Επομένως το συμμετρικό, ως προς τον άξονα x_1, της ευθείας ϵ είναι η ευθεία ϵ' με διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon' : \vec{x}(t) = (1+t, -2, t), \ \ t \in R.$$

Άσκηση 8.30 *α) Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης $f : R^2 \to R^3$, ως προς τις βάσεις $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ του R^2 και $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ του R^3, αν*

$$f(\vec{v}_1) = (1, 0, -1) \ \ \textit{και} \ \ f(\vec{v}_2) = (0, 1, 1).$$

β) Αν $$\vec{v}_1 = (1, -1), \vec{v}_2 = (1, 0)$$

και $$\vec{\epsilon}_1 = (1, 0, 1), \ \ \vec{\epsilon}_2 = (0, -1, 1), \ \ \vec{\epsilon}_3 = (-1, 0, 0),$$

να βρεθεί ο τύπος της f ως προς τις συνήθεις βάσεις των R^2 και R^3.

Λύση

α) Ο πίνακας A της f ως προς τις βάσεις $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ του R^2 και $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ του R^3 έχει ως στήλες τις συντεταγμένες, ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, των εικόνων $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2)$ των $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, οπότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, ο τύπος της f ως προς τις βάσεις $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ είναι

$$f(\vec{u}) = A\vec{u},$$

ή

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x+y \end{bmatrix},$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{u}$ ως προς τη βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $f(x, y)$ οι συντεταγμένες της εικόνας του ως προς την $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$. Άρα

$$f(x, y) = (x, y, -x+y).$$

β) Ο πίνακας A της f ως προς τις συνήθεις βάσεις του R^2 και R^3 είναι

$$B = Q^{-1}AP, \qquad (i)$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ στη συνήθη βάση του R^2 και Q ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ στη συνήθη βάση του R^3.
Ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση του R^2 στην $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι ο P^{-1} και έχει ως στήλες τις συντεταγμένες, ως προς τη συνήθη βάση, των $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας μετάβασης από την συνηθισμένη βάση του R^3 στην $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ είναι

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\begin{aligned} B &= Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως, ο τύπος της f ως προς τις συνήθεις βάσεις του R^2 και R^3 είναι

$$\begin{aligned} f(x,y) &= B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x-3y \\ -x-y \\ x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ή

$$f(x,y) = (-x-3y, -x-y, x).$$

Άσκηση 8.31 *Για τη γραμμική απεικόνιση του R^3 με πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

να βρεθούν οι εικόνες:
α) Της ευθείας με καρτεσιανές εξισώσεις

$$x_1 - x_3 = 1 \;\; \textit{και} \;\; x_2 + x_3 = 2.$$

β) Του επιπέδου

$$x_1 - 2x_2 = 1.$$

Λύση

α) Η εικόνα μέσω της f ενός σημείου (x_1, x_2, x_3) είναι το σημείο (x_1', x_2', x_3'), όπου

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x_3 = t$, προκύπτουν παραμετρικές εξισώσεις της (ϵ)

$$x_1 = 1 + t \text{ και } x_2 = 2 - t,$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των εικόνων μέσω της f των σημείων

$$P(1 + t, 2 - t, t)$$

της (ϵ) είναι

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - x_3 = 1 + t - t = 1 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 = -(1 + t) + 2(2 - t) + t = 3 - 2t \\ x_3' &= x_1 + 2x_3 = 1 + t + 2t = 1 + 3t \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις ευθείας, οπότε η εικόνα (ϵ') της (ϵ) μέσω της f είναι η ευθεία με διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon' : \vec{x}(t) = (2 - 2t, 3 - 2t, 1 + 3t), \quad t \in R.$$

β) Για τα σημεία $P(x_1, x_2, x_3)$ του π ισχύει

$$x_1 - 2x_2 = 1 \text{ ή } x_1 = 1 + 2x_2,$$

οπότε για τις εικόνες $P'(x_1', x_2', x_3')$ μέσω της f των σημείων του π ισχύει

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 = -(1 + 2x_2) + 2x_2 + x_3 \\ &= x_3 - 1 \\ x_3' &= x_1 + 2x_3 = 1 + 2x_2 + 2x_3 \\ &= 2x_2 + 2x_3 + 1. \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις επιπέδου, οπότε η εικόνα π' μέσω της f του π είναι το επίπεδο με διανυσματική εξίσωση ($x_2 = k, x_3 = m$)

$$\pi' : \vec{x}(k, m) = (k - m, m - 1, 2k + 2m + 1).$$

Η καρτεσιανή εξίσωση του π' προκύπτει απαλείφοντας τα k, m από τις παραμετρικές εξισώσεις του

$$\begin{aligned} x_1 &= k - m \\ x_2 &= m - 1 \\ x_3 &= 2k + 2m + 1. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο πρώτες προκύπτει

$$x_1 + x_2 = k - 1 \Leftrightarrow k = x_1 + x_2 + 1$$

και

$$m = k - x_1 = x_1 + x_2 + 1 - x_1 = x_2 + 1,$$

οπότε η τρίτη γίνεται

$$x_3 = 2(x_1 + x_2 + 1) + 2(x_2 + 1) + 1$$

ή
$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 = 5.$$

Άσκηση 8.32 *Για τη γραμμική απεικόνιση*

$$f : R^4 \to R^3, \quad f(x,y,z,w) = (x - y + z + w, x + 2y - z + w, 3y - 2z), \; x,y,z \in R$$

α) Να βρεθούν η διάσταση της εικόνας και του πυρήνα της.
β) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τιμές του k ώστε το διάνυσμα $(1,3,k)$ να ανήκει στην εικόνα της f.

γ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τιμές του k ώστε το διάνυσμα $(1,0,0,k)$ να ανήκει στον πυρήνα της f.

Στο βιβλίο υπάρχει λάθος στο (γ). Το σωστό είναι $(1,0,0,k)$.

Λύση

α) Στην λύση της Άσκησης 8.12 δείχνουμε ότι

$$im(f) = span\{(1,1,0),(-1,2,3)\}$$

και

$$ker(f) = span\{(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0),(-1,0,0,1)\}$$

β) Για να ανήκει το διάνυσμα $\vec{v} = (1,3,k)$ στην εικόνα της f πρέπει

$$(1,3,k) = \lambda(1,1,0) + m(-1,2,3)$$

ή
$$(1,3,k) = (\lambda - m, \lambda + 2m, 3m), \quad \lambda, m \in R$$

Δηλαδή πρέπει να έχει λύση ως προς λ και m το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda - m &= 1 \\ \lambda + 2m &= 3 \\ 3m &= k \end{aligned}$$

Ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι 2 (αφού $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$), οπότε για να έχει λύση το σύστημα πρέπει ο βαθμός του επαυξημένου πίνακά του

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$$

να είναι 2. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$det(A|B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A|B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \; 3k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Επομένως, το διάνυσμα $\vec{v}$ ανήκει στην εικόνα της f αν και μόνο αν $k = 2$.
γ) Για να ανήκει το διάνυσμα $\vec{u} = (1,0,0,k)$ στον πυρήνα της f πρέπει

$$\vec{u} = \lambda(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0) + m(-1,0,0,1)$$

ή
$$(1,0,0,k) = (-\frac{\lambda}{3} - m, \frac{2\lambda}{3}, \lambda, m)$$

Δηλαδή πρέπει να έχει λύση το σύστημα

$$\begin{aligned}
-\frac{\lambda}{3} - m &= 1\\
\frac{2\lambda}{3} &= 0\\
\lambda &= 0\\
m &= k
\end{aligned}$$

Από τις 3 πρώτες εξισώσεις προκύπτουν

$$\lambda = 0 \quad \text{και} \quad m = -1$$

οποτε για να έχει λύση το σύστημα πρέπει

$$k = m = -1$$

Επομένως, για να ανήκει το διάνυσμα αυτό στον πυρήνα της f πρέπει $k = -1$.

Άσκηση 8.33 *Για τη γραμμική απεικόνιση f του R^3 με πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad a, \beta, \gamma > 0 \text{ σταθερές}$$

να βρεθούν οι εικόνες:
α) Του σημείου $M(-1, 2, 3)$.
β) Του επιπέδου

$$\pi : \ x_1 + x_2 - x_3 = 1.$$

γ) Της σφαίρας

$$S : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

δ) Της ευθείας

$$x_1 + x_3 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Λύση

α) Η εικόνα του σημείου $M(-1, 2, 3)$ είναι το σημείο $M'(x_1', x_2', x_2')$, όπου

$$\begin{bmatrix} x_1'\\ x_2'\\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1\\ 2\\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\\ 2\beta\\ 3\gamma \end{bmatrix}$$

οπότε

$$M'(-a, 2\beta, 3\gamma).$$

δ) Απο τις καρτεσιανές εξισώσεις

$$x_1 + x_3 = 1, \quad x_2 = 2$$

της ευθείας προκύπτει (θέτοντας $x_3 = t$)

$$x_1 = 1 - t, \quad x_2 = 2$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των εικόνων μέσω της f των σημείων

$$P(1 - t, 2, t)$$

της ϵ είναι

$$\begin{aligned}
x_1' &= ax_1 = a(1 - t)\\
x_2' &= \beta x_2 = 2\beta\\
x_3' &= \gamma x_3 = \gamma t
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις της εικόνας ϵ' της ϵ μέσω της f. Επομένως, η ϵ' έχει διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon' : \vec{x}(t) = (-a - at, 2\beta, \gamma t), \quad t \in R.$$

Κεφάλαιο 9

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Άσκηση 9.1 *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

και να εξεταστεί αν ο A διαγωνιοποιείται.

Λύση

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

οπότε

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

Για $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y-z \\ -y+z \\ -2y-4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ -2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y = z = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad x \in R\} \\ &= span(1, 0, 0) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = -1$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ y+z \\ -2y-2z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 2x+y-z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ -2y-2z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y=-z$$

και $$2x=-y+z=2z \Leftrightarrow x=z$$

οπότε

$$\begin{aligned} V(-1) &= \{(x,y,z)=(z,-z,z), \quad z\in R\} \\ &= span(1,-1,1) \end{aligned}$$

Για $\lambda_3=-2$

$$(A-\lambda_3 I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x+y-z \\ 2y+z \\ -2y-z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} 3x+y-z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \\ -2y-z &= 0 \end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις δίνουν

$$z=-2y$$

και η πρώτη

$$3x=-y+z=-y-2y \Leftrightarrow x=-y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(-2) &= \{(x,y,z)=(-y,y,-2y), \quad y\in R\} \\ &= span(-1,1,-2). \end{aligned}$$

Αφου ο A έχει 3 διακριτές ιδιοτιμές, διαγωνιοποιείται.

Άσκηση 9.2 *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω γραμμικών απεικονίσεων:*

α) $f(x,y)=(4x-y,2x+y)$, *β)* $f(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$

Λύση

α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

οπότε

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

Για $\lambda_1 = 2$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) = (-y,y,z), \quad y,z \in R\} \\ &= span\{(-1,1,0),(0,0,1)\} \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 3$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x,y,z) = (y,y,z), \quad y,z \in R\} \\ &= span\{(1,1,0),(0,0,1)\} \end{aligned}$$

β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

οπότε

$$\lambda_1 = 2 \text{ (διπλή) και } \lambda_2 = 3.$$

Για $\lambda_1 = 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ -y - z \\ 2y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -y - z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y = z = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x, y, z) = (x, 0, 0), \ \ x \in R\} \\ &= span(1, 0, 0) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 3$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \ \ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 \\ 0 & 2 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x + y \\ -2y - z \\ 2y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -2y - z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$\begin{aligned} z &= -2y \\ x &= y \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x, y, z) = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2), \ \ y \in R\} \\ &= span(1, 1, -2) \end{aligned}$$

Άσκηση 9.3 *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των πινάκων*

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *β)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Λύση

α) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ (1-\lambda)^2 = 0$$

Άρα, ο A έχει μόα διπλή ιδιοτιμή την

$$\lambda_1 = 1$$

Για $\lambda_1 = 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_I)\vec{v} = \vec{0} \ \ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα $y = 0$

οπότε

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y)=(x,0),\ \ x\in R\} \\ &= span(1,0) \end{aligned}$$

β) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A-\lambda I|=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2-1-1=0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

Για $\lambda_1=\sqrt{2}$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A-\lambda_I)\vec{v}=\vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})x+y \\ x-(1-\sqrt{2})y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$(1-\sqrt{2})x+y=0 \ \Leftrightarrow\ y=(\sqrt{2}-1)x$$

Για $x=1$ ισχύει

$$y=(\sqrt{2}-1),$$

οπότε

$$V(\sqrt{2}) = \left\{k(1,\sqrt{2}-1),\ \ k\in R\right\} = span(1,\sqrt{2}-1).$$

Όμοια προκύπτει

$$\begin{aligned} V(-\sqrt{2}) &= \left\{k(1-\sqrt{2},1),\ \ k\in R\right\} \\ &= span(1-\sqrt{2},1) \end{aligned}$$

Άσκηση 9.4 *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω γραμμικών απεικονίσεων και να εξεταστεί αν είναι διαγωνιοποιήσιμες*

α) $f(x,y)=(4x+2y,x+3y)$, *β)* $f(x,y,z)=(x+2y-z,x-y,2x-2y)$,

γ) $f(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

Λύση

α) Ο πίνακας της γραμμικής αυτής απεικόνισης είναι

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A-\lambda I|=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2-7\lambda+10=0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1=5 \quad \text{ή} \quad \lambda_2=2.$$

Για $\lambda_1=5$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A-\lambda_I)\vec{v}=\vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4-5 & 2 \\ 1 & 3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -x+2y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$-x+2y=0 \ \Leftrightarrow\ x=2y,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 5$ είναι

$$V(5) = \{(x,y) = k(1,2) \;\; x \in R\}$$

Όμοια προκύπτει

$$V(2) = \{k(-1,1), \;\; k \in R\}.$$

Επειδή η γραμμική αυτή απεικόνιση έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμη.

β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 0$$

Για $\lambda_1 = 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-1 & 2 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 2 & -2 & 0-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2y - z \\ x - 2y \\ 2x - 2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} 2y - z &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει

$$z = 2y \quad \text{και} \quad x = 2y$$

και αντικαθιστώντας στην τρίτη παίρνουμε

$$2 \cdot 2y - 2y - 2y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y,z) = (2y, y, 2y) = y(2,1,2), \;\; y \in R\} \\ &= span(2,1,2) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = -1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 & -1 \\ 1 & 1-(-1) & 0 \\ 2 & -2 & 0-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x + 2y - z \\ x \\ 2x - 2y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 0 \\ x &= 0 \\ 2x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$z = 2y \quad \text{και} \quad x = 0$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x, y, z) = (0, y, 2y) = y(0, 1, 2), \quad y \in R\} \\ &= span(0, 1, 2) \end{aligned}$$

Για $\lambda_3 = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-0 & 2 & -1 \\ 1 & 1-0 & 0 \\ 2 & -2 & 0-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ x - y \\ 2x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y = x$$

και

$$z = x + 2y = x + 2x = 3x,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x, y, z) = (x, x, 3x) = x(1, 1, 3), \quad x \in R\} \\ &= span(1, 1, 3) \end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας αυτός έχει 3 διακριτές ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 9.5 *Να εξεταστεί αν οι παρακάτω πίνακες διαγωνιοποιούνται*

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \gamma)\ A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$\delta) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \epsilon) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

a) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2$$

Για $\lambda_1 = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + y \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x,y) = (-y,y) = y(-1,1), \ \ y \in R\} \\ &= span(-1,1) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x,y) = (y,y) = y(1,1), \ \ y \in R\} \\ &= span(1,1) \end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας αυτός έχει 2 διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος.
β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda - (1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

η μόνη πραγματική ιδιοτιμή είναι

$$\lambda_1 = -1$$

Επειδή όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι πραγματικές, ο πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 9.7 *α) Να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο*

$$f(x,y,z) = (x + y - z, z, -2y - 3z)$$

είναι διαγωνιοποιήσιμη και να βρεθεί η βάση ως προς την οποία ο πίνακας της είναι διαγώνιος και ο τύπος της ως προς τη βάση αυτή.

β) Να βρεθεί ο τύπος της απεικόνισης $f^4(x)$ ως προς την κανονική βάση του R^3.

Λύση

α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= span(1,0,0) \\ V(-1) &= span(-1,1,-1) \\ V(-2) &= span(1,-1,2) \end{aligned}$$

β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f^4 είναι ο A^4.
Ισχύει

$$A^4 = PD^4P^{-1} \qquad (i)$$

όπου D ο αντίστοιχος του A διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ισχύει (βλ. Πρόταση 3.7)

$$D^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης P από τη συνήθη βάση στη βάση στην οποία ο A είναι διαγώνιος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματά του

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και ο αντίστροφός του είναι

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$\begin{aligned} A^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 15 & 15 \\ 0 & -14 & -15 \\ 0 & 30 & 31 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της απεικόνισης f^4 ως προς την κανονική βάση του R^3 είναι

$$f^4(x,y,z) = (x + 15y + 15z, -14y - 15z, 30y + 31z)$$

Άσκηση 9.8 *Να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση του R^4 με τύπο*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$
$$(x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4)$$

είναι διαγωνιοποιήσιμη και να βρεθεί η βάση ως προς την οποία ο πίνακας της είναι διαγώνιος και ο τύπος της ως προς τη βάση αυτή.

Λύση

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0 \quad (\text{διπλή}) \quad , \lambda_3 = 6$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι των ιδιοτιμών $\lambda_1 = -2, \lambda_3 = 6$ είναι

$$\begin{aligned} V(-2) &= span(1,-1,1,-1) \\ V(6) &= span(1,1,1,1) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1-0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+2y+z+2w \\ 2x+y+2z+w \\ x+2y+z+2w \\ 2x+y+2z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x+2y+z+2w &= 0 \\ 2x+y+2z+w &= 0 \end{aligned}$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις βρίσκουμε τους 2 αγνώστους, x και y συναρτήσει των z και w, γράφοντας το σύστημα ως

$$\begin{aligned} x+2y &= -z-2w \\ 2x+y &= -2z-w \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί -2 και προσθέτοντας κατά μέλη με τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-4y + y = 2z + 4w - 2z - w \Leftrightarrow -3y = 3w \Leftrightarrow y = -w$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x = -2y - z - 2w = -2(-w) - z - 2w = -z$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x,y,z,w) = (-z,-w,-z,w) = z(-1,0,1,0) + w(0,-1,0,1), \quad z,w \in R\} \\ &= span\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\} \end{aligned}$$

Άρα, $$dim(V(0)) = 2,$$

οπότε ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας είναι ο

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη συνηθισμένη βάση στη βάση στην οποία ο πίνακας της f είναι διαγώνιος είναι ο (έχει ως στήλες γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο τύπος της f στη βάση αυτή είναι (x_1', x_2', x_3', x_4' οι συντεταγμένες ως προς τη νέα βάση)

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2', x_3', x_4') &= D\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 6x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα,

$$f(x_1', x_2', x_3', x_4') = (-2x_1, 0, 0, 6x_4)$$

Άσκηση 9.10 *Να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (5x - 6y - 6z, -x + 4y + 2z, 3x - 6y - 4z), \quad x, y, z \in R$$

είναι διαγωνιοποιήσιμη και να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης

$$f^2 - 2f + 3I.$$

Λύση

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{και } \lambda_2 = 2 \quad (\text{διπλή})$$

Για $\lambda_1 = 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-1 & 6 & -6 \\ -1 & 4-1 & 2 \\ 3 & -6 & -4-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x - 6y - 6z \\ -x + 3y + 2z \\ 3x - 6y - 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 4x - 6y - 6z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y,z) = y(-3,1,-3),\ \ y \in R\} \\ &= span(-3,1,-3) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A-\lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-2 & -6 & -6 \\ -1 & 4-2 & 2 \\ 3 & -6 & -4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x-6y-6z \\ -x+2y+2z \\ 3x-6y-6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από τις 3 αυτές εξισώσεις, που είναι ισοδύναμες, προκύπτει ότι

$$-x+2y+2z = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 2y+2z$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) = (2y+2z,y,z) = y(2,1,0)+z(2,0,1),\ \ y,z \in R\} \\ &= span\{(2,1,0),(2,0,1)\} \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης $g = f^2 - 2f + 3$ είναι

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1^2 - 2\cdot 1 + 3 = 2 \\ \beta_2 &= 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Επειδή για την διπλή ιδιοτιμή ισχύει

$$dim\,(V(2)) = 2$$

η γραμμική απεικόνιση f είναι διαγωνιοποιήσιμη, οπότε τα ιδιοδιανύσματατης της g είναι οι παραπάνω ιδιοχώροι, δηλαδή

$$\begin{aligned} V(\beta_1) &= span(-3,1,-3) \\ V(\beta_2) &= span\{(2,1,0),(2,0,1)\} \end{aligned}$$

Άσκηση 9.14 *Η γραμμική απεικόνιση f του R^3 απεικονίζει τα διανύσματα μίας βάσης του $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$ στα*

$$f(\vec{\epsilon}_1) = 9\vec{\epsilon}_1 - 5\vec{\epsilon}_2 - 8\vec{\epsilon}_3,\ \ f(\vec{\epsilon}_2) = \vec{\epsilon}_2 + 6\vec{\epsilon}_3 \ \ \textit{και}\ \ f(\vec{\epsilon}_3) = \vec{\epsilon}_3. \qquad (1)$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της f και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.
β) Να εξεταστεί αν η f είναι διαγωνιοποιήσιμη.

Λύση

Ο πίνακας της f έχει ως στήλες τις εικόνες των διανυσμάτων της βάσης

$$A = [f(\vec{\epsilon}_1)\ \ f(\vec{\epsilon}_2)\ \ f(\vec{\epsilon}_3)] = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο Παράδειγμα 9.3 δείχνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{διπλή}) \quad \lambda_2 = 9 \quad (\text{απλή})$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= span(0,0,1) \\ V(9) &= span(-32,20,47) \end{aligned}$$

β) Επειδή η διάσταση του ιδιοχώρου της διπλής ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι

$$dim\,(V(1)) = 1,$$

η f δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη

Άσκηση 9.18 α) Να δειχθεί ότι ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
διαγωνιοποιείται και να βρεθεί μία διαγωνιοποίησή του.
β) Να βρεθεί ο A^7.

Λύση

Οι ιδιοτιμές του πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
προκύπτουν από την εξίσωση
$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-3)^2(\lambda-1) = 0$$
οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι
$$\lambda_1 = 1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 3 \quad (\text{διπλή}).$$
Για $\lambda_1 = 1$ προκύπτει ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής είναι
$$V(1) = \{k(-2,1,-1),\ \ k \in R\} = span(-2,1,-1).$$
Για $\lambda_2 = 3$ παίρνουμε το σύστημα
$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 2 & -2 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ -1 & -1 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2x+2y+2z \\ x-y-z \\ -x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Οι εξισώσεις αυτές ισοδυναμούν με την
$$x - y - z = 0 \Leftrightarrow z = x - y,$$
οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι
$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x,y,z) = (x,y,x-y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1),\ \ x,y \in R\} \\ &= span\{(1,0,1),(0,1,-1)\}. \end{aligned}$$
Επομένως, ο πίνακας A διαγωνιοποιείται, και ο πίνακας μετάβασης στη βάση στην οποία ο A γίνεται διαγώνιος είναι
$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας είναι ο
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
και ισχύει
$$D = P^{-1}AP$$
β) Σύμφωνα με το Παράδειγμα 9.10γ
$$A^7 = PD^7P^{-1}$$

όπου (βλ. Πρόταση 3.7)

$$D^7 = \begin{bmatrix} 1^7 & 0 & 0 \\ 0 & 3^7 & 0 \\ 0 & 0 & 3^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2187 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

οπότε από την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned} A^7 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2187 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2186 & 2186 \\ 1093 & 1094 & -1093 \\ -1093 & 1093 & 2187 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 9.21 α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$B = A^3 - 2A^2 + 3A - 2I,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

β) Να εξεταστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

α) Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 4$ (απλές) και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= \{(k,0,k),\ k \in R\} \\ V(\lambda_2) &= \{(0,k,0),\ k \in R\} \\ V(\lambda_3) &= \{(-k,0,k),\ k \in R\} \end{aligned}$$

Επειδή ο A έχει 3 διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμος, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda_1^3 - 2\lambda_1^2 + 3\lambda_1 - 2 = 0^3 - 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 2 = -2 \\ \beta_2 &= \lambda_2^3 - 2\lambda_2^2 + 3\lambda_2 - 2 = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 2 = 4 \\ \beta_3 &= \lambda_3^3 - 2\lambda_3^2 + 3\lambda_3 - 2 = 4^3 - 2\cdot 4^2 + 3\cdot 4 - 2 = 42 \end{aligned}$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{aligned} V(\beta_1) &= \{(k,0,k),\ k \in R\} = span(1,0,1) \\ V(\beta_2) &= \{(0,k,0),\ k \in R\} = span(0,1,0) \\ V(\beta_3) &= \{(-k,0,k),\ k \in R\} = span(-1,0,1) \end{aligned}$$

Άσκηση 9.22 *α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Να γραφεί (αν αυτό είναι δυνατόν) το διάνυσμα $\vec{v} = (0, 1, 1)$ ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του A.

Λύση

Οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν από την εξίσωση

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad (\text{διπλή}) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2 \quad (\text{απλή}) \end{aligned}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ x+y+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$z = 0 \quad \text{και} \quad y = -x$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x, y, z) = (x, -x, 0) = x(1, -1, 0), \ \ x \in R\} \\ &= span(1, -1, 0) \end{aligned}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -x \\ x+z \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$z = 0 \quad \text{και} \quad x = 0,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x, y, z) = (0, y, 0) = y(0, 1, 0), \ \ y \in R\} \\ &= span(0, 1, 0) \end{aligned}$$

Γράφουμε το $\vec{v} = (0,1,1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του A

$$\vec{v} = k\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 \Leftrightarrow (0,1,0) = k(1,-1,0) + \lambda(0,1,0) \Leftrightarrow (0,1,1) = (k,-k+\lambda,0)$$

που είναι προφανώς αδύνατο, οπότε το διάνυσμα $\vec{v}$ δε μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του A.

Άσκηση 9.30 Να δειχθεί ότι αν η λ_1 είναι ιδιοτιμή ενός $n \times n$ αντιστρέψιμου πίνακα Α και $\vec{v}_1$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε η $\frac{1}{\lambda_1}$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρόφου A^{-1} του A και το $\vec{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή.

Λύση

Αν η λ_1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα Α και $\vec{v}_1$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1. \qquad (i)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (i) επί τον αντίστροφο A^{-1} του Α προκύπτει

$$A^{-1}(A\vec{v}_1) = A^{-1}(\lambda_1\vec{v}_1)$$

ή

$$(A^{-1}A)\vec{v}_1 = \lambda_1(A^{-1}\vec{v}_1).$$

ή

$$I\vec{v}_1 = \lambda_1(A^{-1}\vec{v}_1),$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας, ή ($\lambda_1 \neq 0$, αφού ο Α είναι αντιστρέψιμος)

$$A^{-1}\vec{v}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\vec{v}_1.$$

Επομένως, η $\frac{1}{\lambda_1}$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρόφου A^{-1} του Α και το $\vec{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή.

Άσκηση 9.31 Να δειχθεί ότι αν η $\lambda_1 \neq 0$ είναι ιδιοτιμή ενός $n \times n$ πίνακα Α και το $\vec{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή, τότε η $\frac{|A|}{\lambda_1}$ είναι ιδιοτιμή του συμπληρωματικού του $adj(A)$ του Α και το $\vec{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή.

Λύση

Αν η λ_1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα Α και $\vec{v}_1$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1. \qquad (i)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (i) επί τον συμπληρωματικό $adj(A)$ του Α προκύπτει

$$adj(A)(A\vec{v}_1) = adj(A)(\lambda_1\vec{v}_1)$$

ή

$$(adj(A)A)\vec{v}_1 = \lambda_1(adj(A)\vec{v}_1). \qquad (ii)$$

Επειδή

$$adj(A)A = |A|A^{-1}A = |A|I,$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας, οπότε η (ii) δίνει

ή

$$|A|I\vec{v}_1 = \lambda_1(adj(A)\vec{v}_1)$$

ή ($\lambda_1 \neq 0$)

$$adj(A)\vec{v}_1 = \frac{|A|}{\lambda_1}\vec{v}_1$$

Επομένως, η $\frac{|A|}{\lambda_1}$ είναι ιδιοτιμή του συμπληρωματικού του $adj(A)$ του Α και το $\vec{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή.

Άσκηση 9.32 Να εξεταστεί αν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

διαγωνοποιείται:
α) στο R.
β) στο C.

Λύση

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta \end{aligned}$$

οπότε οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$P_A(\lambda) = 0 \iff (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0. \qquad (i)$$

Για $\sin\theta \neq 0 \iff \theta \neq k\pi, \quad k \in Z$, η εξίσωση αυτή είναι προφανώς αδύνατη στο R, οπότε ο A δεν διαγωνοποιείται στο R στην περίπτωση αυτή.
Για $\theta = k\pi, \ k \in Z$ ο A γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{αν } k \text{ άρτιος} \\ A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{αν } k \text{ περιττός} \end{aligned}$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ο A είναι διαγώνιοποιήσιμος.
β) Στο C η (i) έχει τις δύο ρίζες

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \ \text{ και } \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta,$$

οπότε ο A διαγωνοποιείται στο C.
Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= \{(z_1, -iz_1\} = \{z_1(1, -i), \quad z_1 \in C\} = span(1, -i) \\ V(\lambda_2) &= \{(z_1, iz_1\} = \{z_1(1, i), \quad z_1 \in C\} = span(1, i) \end{aligned}.$$

Κεφάλαιο 10

Κανονική μορφή Jordan γραμμικής απεικόνισης ή πίνακα

Άσκηση 10.1 α) Να βρεθεί ο ισοδύναμος κανονικός Jordan πίνακας του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Να βρεθεί ο πίνακας A^n

Λύση

α) Ο ισοδύναμος κανονικός Jordan πίνακας του πίνακα Ά είναι ο

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

και ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης ο

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 10.2 α) Να βρεθεί ο ισοδύναμος κανονικός Jordan πίνακας του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

β) Να βρεθεί ο πίνακας A^n

Λύση

Επειδή ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

του οποίου οι ρίζες είναι

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 1$$

Για τα διανύσματα $\vec{v} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ του ιδιοχώρου $V(-2)$ της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$ ισχύει

$$(A - \lambda_1 I)\,\vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} w \\ 3y + z \\ 3z - 2w \\ x \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Άρα $y = z = w = 0$, οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$V(-2) = \{(x, 0, 0, 0),\;\; x \in R\}\,. \tag{i}$$

οπότε

$$dim\, V(-2) = 2$$

Άρα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 10.4, στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ αντιστοιχεί ένα μπλοκ Jordan διάστασης 2. Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ ισχύει

$$(A - \lambda_2 I)\,\vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -3x + w \\ z \\ -2w \\ -3w \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Άρα $x = z = w = 0$, οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$V(1) = \{(0, y, 0, 0),\;\; y \in R\}\,. \tag{ii}$$

οπότε

$$dim\, V(1) = 1$$

Άρα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 10.4, στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ αντιστοιχεί ένα μπλοκ Jordan διάστασης 2.
Επομένως, ο ισοδύναμος κανονικός Jordan πίνακας του πίνακα A είναι

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 10.4, ισχύει

$$A^n = P J^n P^{-1} \tag{iii}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ είναι το (θέτουμε $x = 1$ στην (i))

$$\vec{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T\,.$$

και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u}_1 = [x \;\; y \;\; z \;\; w]^T\,.$$

προκύπτει από την

$$(A - \lambda_1 I)\,\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} w \\ 3y + z \\ 3z - 2w \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$w = 1, z = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad y = \frac{-2}{9}$$

οπότε

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Για το άλλο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}_2$ ισχύει

$$(A - \lambda_2 I)\,\vec{u}_2 = \vec{v}_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -3x + w \\ z \\ -2w \\ -3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $z = 1$ και $w = y = 0$ οπότε θέτοντας $y = 0$ προκύπτει

$$\vec{u}_1 = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T.$$

Επίσης, ο πίνακας μετάβασης για την κανονική μορφή Jordan του πίνακα A είναι

$$P = [\vec{v}_1\ \ \vec{u}_1\ \ \vec{v}_2\ \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε με τη μέθοδο της Ενότητας 2.5 προκύπτει

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0.22 \end{bmatrix}$$

Επίσης,

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n(-2) & 0 \\ 0 & J_2^n(1) \end{bmatrix}$$

όπου

$$J_1^n(-2) = \begin{bmatrix} (-2)^n & n \cdot (-2)^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

και

$$J_1^n(1) = \begin{bmatrix} 1^n & n \cdot 1^{n-1} \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, προκύπτει

$$J^n = \begin{bmatrix} 1^n & n \cdot 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και από την (i) προκύπτει ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & n \cdot 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0.22 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 10.3 Να βρεθεί ο A^n με

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση

Οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{(διπλή) και} \quad , \lambda_2 = -2 \quad \text{(απλή)}$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
A^n &= \sigma_2 A^2 + \sigma_1 A + \sigma_0 I \\
&= \sigma_2 \begin{bmatrix} 21 & -12 & 0 \\ -4 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + \sigma_1 \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21\sigma_2 - 3\sigma_1 + \sigma_0 & -12\sigma_2 + 6\sigma_1 & 0 \\ -4\sigma_2 + 2\sigma_1 & 13s_2 + \sigma_1 + \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 9s_2 + 3\sigma_1 + \sigma_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

όπου

$$\Pi(\lambda) = \sigma_2\lambda^2 + \sigma_1\lambda + \sigma_0$$

με

$$\Pi'(\lambda) = 2\sigma_2\lambda + \sigma_1$$

και

$$
\begin{aligned}
3^n &= 9\sigma_2 + 3\sigma_1 + \sigma_0 \\
3^n &= 6\sigma_2 + \sigma_1 \\
(-5)^n &= 25\sigma_2 - 5\sigma_1 + \sigma_0
\end{aligned}
$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$
\begin{aligned}
3\sigma_1 9 + \sigma_2 + \sigma_0 &= 3^n \\
\sigma_1 + 6\sigma_2 + \sigma_0 &= 3^n \\
-5\sigma_1 + 25\sigma_2 + \sigma_0 &= (-5)^n
\end{aligned}
$$

από το οποίο βρίσκουμε τις τιμές των $\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0$

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &= -\frac{3}{32}(-5)^n - \frac{85}{32}3^n \\
\sigma_1 &= -\frac{1}{64}(-5)^n + \frac{57}{64}3^n \\
\sigma_2 &= \frac{1}{64}(-5)^n + \frac{7}{64}3^n
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
21\sigma_2 - 3\sigma_1 + \sigma_0 &= \frac{15}{64}(-5)^n + \frac{73}{32}3^n \\
-12\sigma_2 + 6\sigma_1 &= -\frac{9}{32}(-5)^n + \frac{129}{32}3^n \\
-4\sigma_2 + 2\sigma_1 &= \frac{3}{32}(-5)^n + \frac{43}{32}3^n \\
13\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_0 &= \frac{3}{32}(-5)^n - \frac{11}{32}3^n \\
9\sigma_2 + 3\sigma_1 + \sigma_0 &= -\frac{3}{64}(-5)^n + 3^n
\end{aligned}
$$

Άρα, ο πίνακας A^n είναι

$$
A^n = \begin{bmatrix} \frac{15}{64}(-5)^n + \frac{73}{32}3^n & -\frac{9}{32}(-5)^n + \frac{129}{32}3^n & 0 \\ \frac{3}{32}(-5)^n + \frac{43}{32}3^n & \frac{3}{32}(-5)^n - \frac{11}{32}3^n & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{64}(-5)^n + 3^n \end{bmatrix}.
$$

Κεφάλαιο 11

Ευκλείδειοι διανυσματικοί χώροι

Άσκηση 11.1 Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ ενός ευκλείδειου διανυσματικού χώρου

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 2\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2\right)$$

Λύση

$$\begin{aligned} |\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ &= 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 \\ &= 2\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2\right). \end{aligned}$$

Άσκηση 11.2 Να βρεθούν η διάσταση και βάση των διανυσματικών υποχώρων του ευκλειδείου διανυσματικού χώρου R^4 που αποτελούνται από τα διανύσματα του R^4 που είναι:
α) Κάθετα στο διάνυσμα $\vec{a} = (1,1,1,1)$.
β) Κάθετα στα διανύσματα $\vec{\beta} = (1,0,0,-1)$ και $\vec{\gamma} = (-1,0,1,0)$.

Λύση
α) Αν $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$,

$$\begin{aligned} \vec{u}\perp\vec{a} &\Leftrightarrow (u_1,u_2,u_3,u_4)\cdot(1,1,1,1) = 0 \\ &\Leftrightarrow u_1+u_2+u_3+u_4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u_4 = -u_1-u_2-u_3 \end{aligned}$$

οπότε τα κάθετα στο $\vec{a}$ διανύσματα του R^4 είναι ο διανυσματικός υπόχωρος (βλ. πρότ. 11.8)

$$\begin{aligned} V &= \{(u_1,u_2,u_3,u_4):\ u_4 = -u_1-u_2-u_3\} \\ &= \{(u_1,u_2,u_3,-u_1-u_2-u_3),\ u_1,u_2,u_3\in R\} \\ &= \{u_1(1,0,0,-1)+u_2(0,1,0,-1)+u_3(0,0,1,-1)\} \\ &= span\left[(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\right] \end{aligned}$$

Ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

των διανυσμάτων $\vec{v}_1 = (1,0,0,-1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1,-1)$ είναι

$$rank(A) = 3,$$

διότι η υποορίζουσα των πρώτων 3 γραμμών του είναι (τριγωνική)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Επομένως η διάσταση του V είναι 3 και τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του V.
β) Αν $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$,

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{\beta} \quad &\Leftrightarrow \quad (u_1, u_2, u_3, u_4) \cdot (1, 0, 0, -1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 - u_4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_4 = u_1 \\ \vec{u} \perp \vec{\gamma} \quad &\Leftrightarrow \quad (u_1, u_2, u_3, u_4) \cdot (-1, 0, 1, 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -u_1 + u_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_3 = u_1 \end{aligned}$$

οπότε τα κάθετα στα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ διανύσματα του R^4 είναι ο διανυσματικός υπόχωρος (βλ. πρότ. 11.8)

$$\begin{aligned} V &= \{(u_1, u_2, u_3, u_4) : \ u_4 = u_1 \ \text{ και } \ u_3 = u_1\} \\ &= \{(u_1, u_2, u_1, u_1), \quad u_1, u_2 \in R\} \\ &= \{u_1(1, 0, 1, 1) + u_2(0, 1, 0, 0)\} \\ &= span\,[(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)] \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$ προφανώς δεν είναι παράλληλα, οπότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του U, του οποίου η διάσταση είναι 2.

Άσκηση 11.3 Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v} = (2, -3, 2, 1)$ του ευκλειδείου διανυσματικού χώρου R^4 σε μια συνιστώσα παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{a} = (-1, 1, 0, 0)$ και μια κάθετη σε αυτό.

Λύση

Αν $\vec{p}$, $\vec{q}$ συνιστώσες του $\vec{v}$ παράλληλα και κάθετα με το $\vec{a}$,

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q} \tag{i}$$

και

$$\vec{p} = \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 2\,(-1) + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -5$$

και

$$|\vec{a}|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2,$$

οπότε

$$\vec{p} = -\frac{5}{2}\,(-1, 1, 0, 0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 0, 0\right).$$

Ετσι η (i) δίνει

$$\vec{q} = \vec{v} - \vec{p} = (2, -3, 2, 1) - \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 1\right).$$

Άσκηση 11.5 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση

β) Επειδή

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ο A είναι ορθογώνιος πίνακας, οπότε ο αντίστροφός του είναι ο ανάστροφός του

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 11.7 α) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,0,1,0),\ \vec{v}_2 = (-1,1,1,1),\ \vec{v}_3 = (1,0,0,0),\ \vec{v}_4 = (0,1,0,0)$$

του R^4 αποτελούν βάση του και να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του R^4, της οποίας το ένα διάνυσμα να είναι το $\vec{v}_1 = (1,0,1,0)$.
β) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα των διανυσματικών υποχώρων του R^4:
$i)\,A = span(\vec{v}_1),\quad ii)\,B = span(\vec{v}_2,\vec{v}_3),\quad iii)\,\Gamma = span(\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4).$

Λύση

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$ ειναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Εφαρμόζοντας την μέθοδο $Gram - Schmidt$ βρίσκουμε από την βάση $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$ του R^4 μια ορθογώνια βάση του $\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2,\ \vec{\epsilon}_3,\ \vec{\epsilon}_4$.

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_1 &= \vec{v}_1 = (1,0,1,0) \\ \vec{\epsilon}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1 \\ &= (-1,1,1,1) - \frac{(-1,1,1,1)\cdot(1,0,1,0)}{1^2+1^2}(1,0,1,0) \\ &= (-1,1,1,1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|^2}\vec{\epsilon}_2 \\
&= (1,0,0,0) - \frac{(1,0,0,0)\cdot(1,0,1,0)}{1^2+1^2}(1,0,1,0) \\
&\quad - \frac{(1,0,0,0)\cdot(-1,1,1,1)}{1^2+1^2+1^2+1^2}(-1,1,1,1) \\
&= (1,0,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) - \frac{-1}{4}(-1,1,1,1) \\
&= \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
\vec{\epsilon}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4 \cdot \vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1 - \frac{\vec{v}_4 \cdot \vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|^2}\vec{\epsilon}_2 - \frac{\vec{v}_4 \cdot \vec{\epsilon}_3}{|\vec{\epsilon}_3|^2}\vec{\epsilon}_3 \\
&= (0,1,0,0) - \frac{(0,1,0,0)\cdot(1,0,1,0)}{1^2+1^2}(1,0,1,0) \\
&\quad - \frac{(0,1,0,0)\cdot(-1,1,1,1)}{1^2+1^2+1^2+1^2}(-1,1,1,1) - \frac{(0,1,0,0)\cdot\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{4\left(\frac{1}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= (0,1,0,0) - \frac{0}{2}(1,0,1,0) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= (0,1,0,0) + \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= \left(0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας κάθενα από τα $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4$ με το μέτρο του προκύπτει η ορθοκανονική βάση $\widehat{\epsilon_1}, \widehat{\epsilon_2}, \widehat{\epsilon_3}, \widehat{\epsilon_4}$ του $A^{\perp}$.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\epsilon_1} &= \frac{\vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \\
\widehat{\epsilon_2} &= \frac{\vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|} = \frac{1}{2}(-1,1,1,1) \\
\widehat{\epsilon_3} &= \frac{\vec{\epsilon}_3}{|\vec{\epsilon}_3|} = \frac{1}{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\
\widehat{\epsilon_4} &= \frac{\vec{\epsilon}_4}{|\vec{\epsilon}_4|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

β) $i)$ Επειδή

$$A = span(\vec{v}_1) = span(\vec{\epsilon}_1),$$

σύμφωνα με την πρότ. 5.11,

$$A^{\perp} = span(\vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4).$$

$ii)$ Επειδή

$$B = span(\vec{v}_2, \vec{v}_3),$$

βρίσκουμε με την μέθοδο $Gram - Schmidt$ μια ορθογώνια βάση του B από την βάση $\vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 = (-1,1,1,1) \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|^2}\vec{u}_2 \\
&= (1,0,0,0) - \frac{(1,0,0,0)\cdot(-1,1,1,1)}{(-1)^2+1^2+1^2+1^2}(-1,1,1,1) \\
&= \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

Επεκτείνουμε την βάση αυτή σε μια βάση του R^4 προσθέτοντας τα διανύσματα

$$\vec{u}_4 = (0,0,0,1) \text{ και } \vec{u}_5 = (0,1,0,0).$$

Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ είναι (αναπτυγμα ως προς την τρίτη στήλη)

$$A = \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1 \neq 0$$

οπότε τα $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^4.
Από την βάση αυτή βρίσκουμε μια ορθογώνια βάση $\vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4, \vec{w}_5$ του R^4 με την μέθοδο $Gram-Schmidt$.

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= \vec{u}_2 = (-1,1,1,1) \\
\vec{w}_3 &= \vec{u}_3 = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
\vec{w}_4 &= \vec{u}_4 - \frac{\vec{u}_4\cdot\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|^2}\vec{w}_2 - \frac{\vec{u}_4\cdot\vec{w}_3}{|\vec{w}_3|^2}\vec{w}_3 \\
&= (0,0,0,1) - \frac{(0,0,0,1)\cdot(-1,1,1,1)}{(-1)^2+1^2+1^2+1^2}(-1,1,1,1) - \frac{(0,0,0,1)\cdot\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^2}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= (0,0,0,1) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= \left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_5 &= \vec{u}_5 - \frac{\vec{u}_5\cdot\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|^2}\vec{w}_2 - \frac{\vec{u}_5\cdot\vec{w}_3}{|\vec{w}_3|^2}\vec{w}_3 - \frac{\vec{u}_5\cdot\vec{w}_4}{|\vec{w}_4|^2}\vec{w}_4 \\
&= (0,1,0,0) - \frac{(0,1,0,0)\cdot(-1,1,1,1)}{|(-1,1,1,1)|^2}(-1,1,1,1) - \frac{(0,1,0,0)\cdot\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\left|\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right|^2}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&\quad - \frac{(0,1,0,0)\cdot\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}{\left|\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right|^2}\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
&= (0,1,0,0) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) - \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
&= (0,1,0,0) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
&= \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)
\end{aligned}
$$

Σύμφωνα με την πρότ. 5.11,

$$B^{\perp} = span(\vec{w}_4,\vec{w}_5) = span\left[\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\right].$$

$iii)$ Επειδή

$$\Gamma = span(\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4) = span(\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{v}_4)$$

βρίσκουμε μια ορθογώνια βάση $\vec{d}_2,\vec{d}_3,\vec{d}_4$ του Γ με την μέθοδο $Gram-Schmidt$ ξεκινώντας από τα διανύσματα $\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{v}_4$.

$$
\begin{aligned}
\vec{d}_2 &= \vec{u}_2 = (-1,1,1,1) \\
\vec{d}_3 &= \vec{u}_3 = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
\vec{d}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{d}_2}{|\vec{d}_2|^2}\vec{d}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{d}_3}{|\vec{d}_3|^2}\vec{d}_3 \\
&= (0,1,0,0) - \frac{(0,1,0,0)\cdot(-1,1,1,1)}{(-1)^2+1^2+1^2+1^2}(-1,1,1,1) - \frac{(0,1,0,0)\cdot\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^2}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= (0,1,0,0) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= (0,1,0,0) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \\
&= \left(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Επεκτείνουμε την βάση αυτή σε μια βάση του R^4 προσθέτοντας το διάνυσμα

$$\vec{d}_5 = (0,0,0,1)\ .$$

Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{d}_2,\vec{d}_3,\vec{d}_4,\vec{d}_5$ είναι (αναπτυγμα ως προς την τέταρτη στήλη)

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}, \\
&= -1 \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} - \frac{3}{4} \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \\
&= 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

οπότε τα $\vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4, \vec{d}_5$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^4.
Από την βάση αυτή βρίσκουμε μια ορθογώνια βάση $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ του R^4 με την μέθοδο $Gram-Schmidt$.

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_2 &= \vec{d}_2 = (-1,1,1,1) \\
\vec{e}_3 &= \vec{d}_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
\vec{e}_4 &= \vec{d}_4 = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\
\vec{e}_5 &= \vec{d}_5 - \frac{\vec{d}_5 \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_2|^2}\vec{e}_2 - \frac{\vec{d}_5 \cdot \vec{e}_3}{|\vec{e}_3|^2}\vec{e}_3 - \frac{\vec{d}_5 \cdot \vec{e}_4}{|\vec{e}_4|^2}\vec{e}_4 \\
&= (0,0,0,1) - \frac{(0,0,0,1)\cdot(-1,1,1,1)}{(-1)^2+1^2+1^2+1^2}(-1,1,1,1) - \frac{(0,0,0,1)\cdot\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^2}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
&\quad - \frac{(0,0,0,1)\cdot\left(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\
&= (0,1,0,0) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\
&= (0,0,0,1) - \frac{1}{4}(-1,1,1,1) - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\
&= \left(0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Σύμφωνα με την πρότ. 5.11,

$$\Gamma^{\perp} = span(\vec{e}_5) = span\left(0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Άσκηση 11.9 Να δειχθεί ότι αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ενός ευκλειδείου διανυσματικού χώρου ισχύει

$$\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \text{και} \quad |\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|,$$

τότε

$$|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\gamma}|.$$

Λύση

$$\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\gamma}| \quad &\Leftrightarrow \quad |-\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\beta}| = |-\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\gamma}| \\
&\Leftrightarrow \quad |-(2\vec{\beta} + \vec{\gamma})| = |-(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})| \\
&\Leftrightarrow \quad (2\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = (\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^2\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2 \cdot 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta}^2 + 2^2\vec{\gamma}^2 + 2\vec{\beta} \cdot 2\vec{\gamma} \\
&\Leftrightarrow \quad 3|\vec{\beta}|^2 = 3|\vec{\gamma}|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|
\end{aligned}$$

που είναι αληθής στην περίπτωση αυτή. Επομένως ισχύει ότι

$$|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\gamma}|.$$

Όμοια δείχνουμε ότι (αντικαθιστώντας το $\vec{\gamma}$ από την $\vec{\gamma} = -\vec{a} - \vec{\beta}$)

$$|\vec{a} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\gamma}|.$$

Άσκηση 11.11 Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}$ ενός ευκλειδείου διανυσματικού χώρου διάστασης δύο ως γραμμικός συνδυασμός των μη παραλλήλων διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$. Δηλαδή να βρεθούν συναρτήσει των $\vec{u}$, $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ οι πραγματικοί αριθμοί k, m αν

$$\vec{u} = k\vec{a} + m\vec{\beta}. \tag{i}$$

Λύση

Από την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{a} &= k\vec{a}^2 + m\vec{a} \cdot \vec{\beta} \\
\vec{u} \cdot \vec{\beta} &= k\vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\vec{\beta}^2
\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό (ως προς k, m) έχει μοναδική λύση αν

$$A = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{\beta} \\ \vec{a} \cdot \vec{\beta} & \vec{\beta}^2 \end{vmatrix} = \vec{a}^2\vec{\beta}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \neq 0$$

Επειδή τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, $\vec{a}^2\vec{\beta}^2 \neq (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2$, οπότε ($A \neq 0$) το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{\beta} \\ \vec{u} \cdot \vec{\beta} & \vec{\beta}^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{\beta}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{\beta})(\vec{a} \cdot \vec{\beta})}{\vec{a}^2\vec{\beta}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2}, \\
m &= \frac{\begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{u} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot \vec{\beta} & \vec{u} \cdot \vec{\beta} \end{vmatrix}}{D} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{\beta})\vec{a}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{\beta})}{\vec{a}^2\vec{\beta}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 11.12 α) Να βρεθεί μια ορθογώνια βάση του διανυσματικού υποχώρου A του ευκλειδείου διανυσματικού χώρου R^4 που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1,0,0,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0,1)$ και $\vec{v}_3 = (1,1,1,0)$ και μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $A^{\perp}$ του A.
β) Να βρεθεί μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $B^{\perp}$ του διανυσματικού υποχώρου

$$B = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

γ) Να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{u}$ του B και $\vec{v}$ του $B^{\perp}$ για τα οποία ισχύει

$$(1,2,1,4) = \vec{u} + \vec{v}.$$

Λύση

α) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι

$$rank(A) = 3,$$

διότι η υποορίζουσα των τριών πρώτων γραμμών του A είναι (κάτω τριγωνική)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

οπότε τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του A.
Εφαρμόζοντας την μέθοδο $Gram - Schmidt$, μια ορθογώνια βάση του A είναι η $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, όπου

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_1 &= \vec{v}_1 = (1,0,0,1) \\
\vec{\epsilon}_2 &= \vec{v}_2 - \text{προβ}_{\vec{\epsilon}_1}\vec{v}_2 \\
&= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1 \\
&= (0,1,0,1) - \frac{(0,1,0,1)\cdot(1,0,0,1)}{1^2+1^2}(1,0,0,1) \\
&= (0,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) \\
&= (-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}) \\
\vec{\epsilon}_3 &= \vec{v}_3 - \text{προβ}_{\vec{\epsilon}_1}\vec{v}_3 - \text{προβ}_{\vec{\epsilon}_2}\vec{v}_3 \\
&= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|^2}\vec{\epsilon}_2 \\
&= (1,1,1,0) - \frac{(1,1,1,0)\cdot(1,0,0,1)}{1^2+1^2}(1,0,0,1) \\
&\quad - \frac{(1,1,1,0)\cdot\left(-\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(-\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Επομένως μια ορθογώνια βάση του υποχώρου A είναι τα διανύσματα

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \vec{\epsilon}_1 = (1,0,0,1)\\ \vec{a}_2 &= 2\vec{\epsilon}_2 = (-1,2,0,1)\\ \vec{a}_3 &= 3\vec{\epsilon}_3 = (2,2,3,-2)\end{aligned}$$

Επεκτείνουμε την βάση αυτή σε μια βάση του R^4 προσθέτοντας το διάνυσμα $\vec{a}_4 = (0,1,0,0)$.
Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ είναι (ανάπτυγμα ως προς την τέταρτη στήλη)

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\\ &= -3 \neq 0\end{aligned}$$

οπότε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του R^4.
Εφαρμόζοντας την μέθοδο $Gram - Schmidt$ βρίσκουμε από την βάση αυτή μια ορθογώνια βάση του R^4.
Επειδή τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι μεταξύ τους κάθετα ανά δύο

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{a}_1 = (1,0,0,1)\\ \vec{u}_2 &= \vec{a}_2 = (-1,2,0,1)\\ \vec{u}_3 &= \vec{a}_3 = (2,2,3,-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_4 &= \vec{a}_4 - \frac{\vec{a}_4\cdot\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1 - \frac{\vec{a}_4\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|^2}\vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_4\cdot\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|^2}\vec{a}_3\\ &= (0,1,0,0) - 0 - \frac{(0,1,0,0)\cdot(-1,2,0,1)}{|(-1,2,0,1)|^2}(-1,2,0,1)\\ &\quad -\frac{(0,1,0,0)\cdot(2,2,3,-2)}{|(2,2,3,-2)|^2}(2,2,3,-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (0,1,0,0) - \frac{2}{6}(-1,2,0,1) - \frac{2}{21}(2,2,3,-2)\\ &= \left(\frac{3}{21}, \frac{3}{21}, -\frac{6}{21}, -\frac{3}{21}\right)\\ &= \frac{3}{21}(1,1,-2,-1)\end{aligned}$$

Επομένως

$$A^{\perp} = span\,(1,1,-2,-1).$$

β) Επειδή

$$B = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

βρίσκουμε με την μέθοδο $Gram - Schmidt$ μια ορθογώνια βάση του B από την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= \vec{v}_1 = (1,0,0,1) \\
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{|\vec{u}_1|^2}\vec{u}_1 \\
&= (0,1,0,1) - \frac{(0,1,0,1)\cdot(1,0,0,1)}{1^2+1^2}(1,0,0,1) \\
&= \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Άρα μια ορθογώνια βάση του B είναι η

$$\vec{u}_1 = (1,0,0,1), \quad \vec{u}_2 = (-1,2,0,1).$$

Επεκτείνουμε την βάση αυτή σε μια βάση του R^4 προσθέτοντας τα διανύσματα

$$\vec{u}_3 = (0,0,0,1) \text{ και } \vec{u}_4 = (0,0,1,0).$$

Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι (αναπτυγμα ως προς την τέταρτη στήλη)

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \neq 0
\end{aligned}
$$

οπότε τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^4.
Από την βάση αυτή βρίσκουμε μια ορθογώνια βάση $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4$ του R^4 με την μέθοδο $Gram-Schmidt$.

$$
\begin{aligned}
\vec{d}_1 &= \vec{u}_1 = (1,0,0,1) \\
\vec{d}_2 &= \vec{u}_2 = (-1,2,0,1) \\
\vec{d}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{d}_1}{|\vec{d}_1|^2}\vec{d}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_2|^2}\vec{d}_2 \\
&= (0,0,0,1) - \frac{(0,0,0,1)\cdot(1,0,0,1)}{1^2+1^2}(1,0,0,1) - \frac{(0,0,0,1)\cdot(-1,2,0,1)}{(-1)^2+2^2+1^2}(-1,2,0,1) \\
&= (0,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) - \frac{1}{6}(-1,2,0,1) \\
&= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\vec{d}_4 &= \vec{u}_4 - \frac{\vec{u}_4\cdot\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|^2}\vec{d}_1 - \frac{\vec{u}_4\cdot\vec{d}_2}{|\vec{d}_2|^2}\vec{d}_2 - \frac{\vec{u}_4\cdot\vec{d}_3}{|\vec{d}_3|^2}\vec{d}_3 \\
&= (0,0,1,0) - \frac{(0,0,1,0)\cdot(1,0,0,1)}{1^2+1^2}(1,0,0,1) - \frac{(0,0,1,0)\cdot(-1,2,0,1)}{(-1)^2+2^2+1^2}(-1,2,0,1) \\
&\quad - \frac{(0,0,1,0)\cdot\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\
&= (0,0,1,0) - 0 - 0 - 0 \\
&= (0,0,1,0)
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την πρότ. 5.11,

$$\begin{aligned}
B^{\perp} &= span(\vec{d}_3,\vec{d}_4) = span\left[\left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},0,\tfrac{1}{3}\right),\ (0,0,1,0)\right] \\
&= span\left[(-1,-1,0,1),\ (0,0,1,0)\right]
\end{aligned}.$$

γ) Αν $\vec{u}\in B$ και $\vec{v}\in B^{\perp}$,

$$(1,2,1,4) = \vec{u}+\vec{v} \Leftrightarrow (1,2,1,4) = k(1,0,0,1)+\lambda(0,1,0,1)+m(-1,-1,0,1)+n(0,0,1,0).$$

ή

$$(1,2,1,4) = (k-m,\lambda-m,n,k+\lambda+m),$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
k-m &= 1 \\
\lambda-m &= 2 \\
n &= 1 \\
k+\lambda+m &= 4
\end{aligned}$$

του οποίου η λύση εύκολα προκύπτει ότι είναι

$$k=\frac{4}{3},\quad \lambda=\frac{7}{3},\quad m=\frac{1}{3},\quad n=1,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= k(1,0,0,1)+\lambda(0,1,0,1) \\
&= \frac{4}{3}(1,0,0,1)+\frac{7}{3}(0,1,0,1) \\
&= \left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},0,\frac{11}{3}\right) \\
\vec{v} &= m(-1,-1,0,1)+n(0,0,1,0) \\
&= \frac{1}{3}(-1,-1,0,1)+(0,0,1,0) \\
&= \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Άσκηση 11.13 Να εξεταστεί αν η απεικόνιση $f: R^n\times R^n\to R$ που ορίζεται από τη σχέση

$$f(\vec{a},\vec{\beta}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\beta_k,$$

όπου $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ και $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του R^n ως προς τη συνηθισμένη βάση του, είναι εσωτερικός πολλαπλασιασμός.

Λύση

Η απεικόνιση f δεν είναι εσωτερικός πολλαπλασιασμός, διότι για $\vec{a} = (1, 0, \cdots, 0) \in R^n$ σύμφωνα με τον ορισμό της

$$f(\vec{a}, \vec{a}) = -1 \cdot 1 = -1 < 0,$$

οπότε δεν ικανοποιεί τον ορισμό 11.1.

Άσκηση 11.15 Να δειχθεί ότι για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ενός πραγματικού ευκλειδείου διανυσματικού χώρου V ισχύει

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 \leq (1 + |\vec{a}|)^2(1 + |\vec{\beta}|)^2.$$

Λύση

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

οπότε

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 \leq \left(|\vec{a}| + |\vec{\beta}|\right)^2$$

ή
$$\left(\vec{a} + \vec{\beta}\right)^2 \leq \left(|\vec{a}| + |\vec{\beta}|\right)^2 \qquad (i)$$

Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι

ή
$$\left(|\vec{a}| + |\vec{\beta}|\right)^2 \leq (1 + |\vec{a}|^2)(1 + |\vec{\beta}|^2) \qquad (ii)$$

Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{\beta}| \leq 1 + |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{a}|^2|\vec{\beta}|^2$$

ή
$$2|\vec{a}||\vec{\beta}| \leq 1 + |\vec{a}|^2|\vec{\beta}|^2$$

ή
$$1 + \left(|\vec{a}||\vec{\beta}|\right)^2 - 2|\vec{a}||\vec{\beta}| \geq 0$$

ή
$$\left(1 - |\vec{a}||\vec{\beta}|\right)^2 \geq 0$$

Η σχέση αυτή είναι αληθής για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του V, οπότε και η ισοδύναμη της (ii) είναι αληθής για κάθε $\vec{a}\vec{\beta}$.

Από τις (i) και (ii) είναι φανερό ότι

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 \leq (1 + |\vec{a}|^2)(1 + |\vec{\beta}|^2).$$

Άσκηση 11.16 α) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (0, -1, 1),\ \vec{v}_2 = (-1, 0, 1),\ \vec{v}_3 = (1, 0, 0)$$

του R^3 αποτελούν βάση του και να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του R^3, της οποίας το ένα διάνυσμα να είναι το $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)$.

β) Να βρεθούν τα ορθογώνια συμπληρώματα των διανυσματικών υποχώρων:

$i)\, A = span(\vec{v}_1), \quad ii)\, B = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$

Στο βιβλίο υπάρχει λάθος: το $\vec{v}_2$ αντί του $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)$.

Λύση

α)

Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι (ανάπτυγμα ως προς τρίτη στήλη)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ειναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο $Gram - Schmidt$, βρίσκουμε από την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ μια ορθογώνια βάση $\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2,\ \vec{\epsilon}_3$ του R^3

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_1 &= \vec{v}_1 = (0,-1,1)\\
\vec{\epsilon}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1\\
&= (-1,0,1) - \frac{(-1,0,1)\cdot(0,-1,1)}{(-1)^2+1^2}(0,-1,1)\\
&= \left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
\vec{\epsilon}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|^2}\vec{\epsilon}_1 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|^2}\vec{\epsilon}_2\\
&= (1,0,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(0,-1,1)}{(-1)^2+1^2}(0,-1,1)\\
&\quad - \frac{(1,0,0)\cdot\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
&= (1,0,0) - 0 + \frac{2}{3}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Διαιρώντας κάθενα από τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ με το μέτρο του προκύπτει η ορθοκανονική βάση $\widehat{\epsilon}_1, \widehat{\epsilon}_2, \widehat{\epsilon}_3$ του R^3.

$$\begin{aligned}
|\vec{\epsilon}_1| &= \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\\
|\vec{\epsilon}_2| &= \sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\\
|\vec{\epsilon}_3| &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

οπότε η ορθοκανονική βάση του R^3 είναι

$$\begin{aligned}
\widehat{\epsilon}_1 &= \frac{\vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\\
\widehat{\epsilon}_2 &= \frac{\vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
\widehat{\epsilon}_3 &= \frac{\vec{\epsilon}_3}{|\vec{\epsilon}_3|} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

β) $i)$ Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανυσματικου υποχώρου

$$A = span(\vec{v}_1) = span(\vec{e}_1),$$

σύμφωνα με την πρότ. 5.11 και επειδή η βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{e}_2, \vec{\epsilon}_3$ είναι ορθογώνια, είναι

$$A^{\perp} = span(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = span\left[\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right].$$

$ii)$ Εφαρμόζοντας την μέθοδο $Gram - Schmidt$, βρίσκουμε από την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ μια ορθογώνια βάση $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ του B.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{v}_1 = (0,-1,1) \\
\vec{a}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{a}_1}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1 \\
&= (-1,0,1) - \frac{(-1,0,1)\cdot(0,-1,1)}{(-1)^2+1^2}(0,-1,1) \\
&= \left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}.$$

Επεκτείνουμε την βάση αυτή σε μια βάση του R^3 προσθέτοντας το διάνυσμα $\vec{a}_3 = (1,0,0)$.
Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι (αναπτυγμα ως προς την τρίτη στήλη)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.
Από την βάση αυτή βρίσκουμε μια ορθογώνια βάση $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3$ του R^4 με την μέθοδο $Gram-Schmidt$ ($\vec{a}_2 \perp \vec{a}_1$).

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}_1 &= \vec{a}_1 = (0,-1,1) \\
\vec{\delta}_2 &= \vec{a}_2 = \left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
\vec{\delta}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3\cdot\vec{\delta}_1}{|\vec{\delta}_1|^2}\vec{\delta}_1 - \frac{\vec{a}_3\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_2|^2}\vec{\delta}_2 \\
&= (1,0,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(0,-1,1)}{(-1)^2+1^2}(0,-1,1) \\
&\quad - \frac{(1,0,0)\cdot\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= (1,0,0) - 0 + \frac{2}{3}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την πρότ. 5.11, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανυσματικού υποχώρου

$$B = span(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

είναι το

$$B^{\perp} = span(\vec{\delta}_3) = span\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$